

Untersuchungen über Grenzzyklen in digitalen Filtern

von
Manfred Büttner

Erlangen, 1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546228_0118

Untersuchungen über Grenzzyklen in digitalen Filtern

Dem Fachbereich Ingenieurwissenschaften
der Universität Erlangen - Nürnberg

zur Erlangung des Grades
Doktor - Ingenieur

vorgelegt von
Manfred Büttner

Erlangen, 1977

Als Dissertation genehmigt vom
Fachbereich Ingenieur-Wissenschaften
der Universität Erlangen - Nürnberg

Tag der Einreichung: 1. Dezember 1976

Tag der Promotion: 18. Februar 1977

Dekan: Prof. Dr. rer. nat. H.J. Schneider

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. W. Schüßler
Prof. Dr.-Ing. D. Seitzer

Herrn Professor Dr.-Ing. W. Schüßler danke ich für die interessante Aufgabenstellung, für seine zahlreichen Anregungen und wertvollen Hinweise während der Arbeit und für seine freundliche Hilfe bei der Zusammenstellung der Ergebnisse.

Herrn Professor Dr.-Ing. D. Seitzer danke ich für sein durch nützliche Hinweise gezeigtes Interesse an der Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1. Einleitung	1
2. Untersuchung von Grenzyklen in rekursiven Blöcken 2. Grades bei verschwindendem Eingangssignal und Runden	3
2.1 Filterstruktur	3
2.2 Messung der Extremwerte bei Runden und Vergleich mit theoretischen Abschätzungen	5
2.2.1 Abschätzung der Amplitude	5
2.2.2 Meßaufbau und untersuchte Pollagen	13
2.2.3 Meßergebnisse und Vergleich mit theoretischen Schranken	17
2.3 Messung der Periodenlänge bzw. der dominierenden Frequenz	21
2.3.1 Grundsätzliche Bemerkungen	21
2.3.1 Meßaufbau und untersuchte Pollagen	22
2.3.3 Darstellung der Meßergebnisse	23
2.4 Untersuchung einer Sonderform von Grenzyklen	28
2.5 Theoretische Betrachtung von Grenzyklen	33
2.5.1 Konstante wirksame Koeffizienten	33
2.5.2 Variable wirksame Koeffizienten	36
2.5.3 Sonderfälle sich ändernder wirksamer Koeffizienten	42
2.6 Verfahren zur praktischen Anwendung der Ergebnisse aus 2.1 bis 2.5	46
2.6.1 Ablaufschema für eine Grenzyklusabschätzung	46
2.6.2 Einführung einer kombinierten Schranke	49
3. Grenzyklen in höhergradigen digitalen Filtern bei Runden	52
3.1 Vorbemerkung	52
3.2 Absolute Schranken für die Amplitude von Grenzyklen in Kaskadenfiltern	54
3.3 Blöcke 2. Grades mit konstantem oder periodischem Eingangssignal	55
3.4 Eine Abschätzungsformel für Grenzyklen	

in einer Kaskade von Blöcken 2. Grades	66
3.5 Vergleich von absoluten Schranken und Schätzwerten mit experimentellen Meßwerten	67
4. Anwendung von Betragsabschneiden und kontrollierter Rundung	68
4.1 Betragsabschneiden bei der 1. und 2. ka- nonischen Form für Blöcke 2. Grades ohne Erregung	68
4.2 Filter 2. Grades ohne Grenzzyklen bei Betragsabschneiden	72
4.3 Ein Block 2. Grades mit Betragsabschneiden nach Addition der unverkürzten Produkte	80
4.4 Betragsabschneiden in Wellendigitalfilter- strukturen	82
4.4.1 Pseudopassivität und asymptotische Stabilität	82
4.4.2 Beispiele für pseudopassive Strukturen 2. Grades	84
4.5 Kontrollierte Rundung	87
4.6 Verhalten von erregten Systemen mit Betragsab- schneiden bzw. kontrollierter Rundung	87
5. Beeinflussung und Unterdrückung von Grenzzyklen mit stochastischen Hilfssignalen	89
5.1 Addition von Rauschen zum Eingangssignal	89
5.2 Zufallsarithmetik ("mixed arithmetic")	91
5.3 Zufallsrunden ("random rounding")	94
5.3.1 Der Quantisierungsfehler bei Zufalls- runden (ZR) hinter einem einzelnen Multiplizierer	95
5.3.2 Unterdrückung von Grenzzyklen in Blöcken 2. Grades mit Zufallsrunden	104
5.3.3 Experimenteller Vergleich von Zufalls- runden mit anderen Methoden zur Grenz- zyklusreduktion	113
6. Anhang	117
A.1 Meßanordnung zur digitalen Spektral- analyse	117
A.2 Koeffizienten und Dämpfungsfrequenz- gänge von 5 digitalen Filtern	118

A.3 Binärer Zufallsgenerator für Zufallsrunden	122
7. Zusammenfassung	123
8. Literaturverzeichnis	125

Verzeichnis der wichtigsten Formelzeichen

$a(f)$	Dämpfungsfrequenzgang
a, b, c	Filterkoeffizienten
a', c'	"wirksame" Koeffizienten
$E[\cdot]$	Erwartungswert
f, f_d, f_p, f_s	Frequenzvariable
f_A, f_T	Abtastfrequenz, Taktfrequenz
$h_0(k)$	Impulsantwort
$ H(f) $	Betragsübertragungsfunktion
$H(z)$	komplexe Übertragungsfunktion
k	Zeitvariable
l_p	Periodenlänge
m	Umlaufzahl bei Grenzzyklen
N	ganze Zahl
$\bar{N}$	mittlere Rauschleistung
$p(\cdot)$	Verteilungsdichtefunktion
Q	Quantisierungseinheit
$r(k)$	binäre Zufallszahl
T	Abtastintervall
$u(k)$	Eingangssignal
w	Wortlänge
$x(k)$	Zustandsgröße
$y(k)$	Ausgangssignal
y	Amplitudenschranke
z	komplexe Frequenzvariable
ZA	Zufallsarithmetik
ZR	Zufallsrundung
δ	Schrittweite
Δ	Fehler, Quantisierungsfehler
Δw	erforderliche zusätzliche Wortlänge
$\overline{\Delta^2}$	mittlere Fehlerleistung
γ_∞	Polwinkel
ζ_∞	Polradius

1. Einleitung

Eine umfassende Darstellung der Grundlagen, Eigenschaften und des Entwurfs digitaler Filter ist seit einiger Zeit in Form von Büchern verfügbar /1,2,3/. Darin eingeschlossen sind auch Aussagen über das grundsätzliche Verhalten realer digitaler Systeme.

Es sei deshalb hier nur kurz wiederholt, daß in rekursiven digitalen Systemen infolge der Wortlängenverkürzung nach Multiplikationen Grenzzyklen entstehen können. Das trifft sowohl für Gleitkomma- als auch für Festkommarechnung zu; die hier angestellten Untersuchungen beschränken sich aber auf Festkommaarithmetik und auf Instabilitäten, die nicht durch Überlauf entstehen. Grenzzyklen treten am häufigsten und unangenehmsten bei verschwindendem Eingangssignal in Erscheinung. Sie kommen aber auch bei Erregung mit deterministischen (z.B. konstanten oder periodischen) Signalen in Form einer dem Nutzsignal überlagerten Störung vor, die unangenehmerweise im allgemeinen von den Anfangsbedingungen abhängt.

Der Stand der Forschung zum Problem der Grenzzyklen bis Anfang 1975 ist in /4/ mit Verweis auf insgesamt 62 Literaturstellen erläutert. Da aus verschiedenen Gründen (siehe/1/) digitale Filter vorteilhaft als Parallel- oder Kaskadenschaltung von Subfiltern 2. Grades realisiert werden, befaßt sich die vorliegende Abhandlung zuerst mit Grenzzyklen in Blöcken 2. Grades ohne Erregung. Ziel der dabei anzustellenden experimentellen und theoretischen Untersuchungen ist es, ein Verfahren zu entwickeln, das es gestattet, bei vorgegebenen Koeffizienten möglichst schnell genaue Informationen über die möglichen Grenzzyklen herzuleiten.

Die Untersuchungen werden dann ausgedehnt auf Blöcke 2. Grades mit konstantem oder periodischem Eingangssignal. Dabei soll ermittelt werden, wie sich so ein System bei Erregung mit einem Grenzzyklus aus dem vorherigen Block verhält. Die Anwendung dieser Ergebnisse führt dann zur Herleitung einer Amplitudenabschätzung für Grenzzyklen in Kaskadenfiltern.

Außer der Abschätzung der Extremwerte und der Frequenzanteile von Grenzzyklen bei vorgegebener Filterkonfiguration ist die Entwicklung von Methoden zur Reduktion oder sogar vollständiger Unterdrückung unerwünschter Schwingungen von großer Bedeutung. Die triviale Lösung, die Wortlänge im Innern so stark zu erhöhen, daß nach der Ausgangsquantisierung die Störungen nicht mehr in Erscheinung treten, ist in der Regel mit zuviel Aufwand ($\hat{=}$ Kosten) verbunden; sie wird nicht näher behandelt. Vielmehr erfolgt eine Analyse von Verfahren, die mit unterschiedlicher, sowohl deterministischer als auch stochastischer Arithmetik zur Wortlängenverkürzung, bzw. mit veränderter Struktur arbeiten. Dabei werden aus der Literatur bekannte und neue Methoden untersucht. Die Ergebnisse ermöglichen dann einen Vergleich in Beziehung auf beste Unterdrückung von Grenzzyklen, minimales Quantisierungsgeräusch und einfache ($\hat{=}$ billige) Realisierung.

2. Untersuchung von Grenzyklen in rekursiven Blöcken

2. Grades bei verschwindendem Eingangssignal und Kunden

2.1 Die Filterstruktur

Ein rein rekursives digitales Teilfilter 2. Grades hat grundsätzlich die in Bild 2.1 angegebene Struktur mit den Zustandsvariablen $z_1(k)$ und $z_2(k)$.

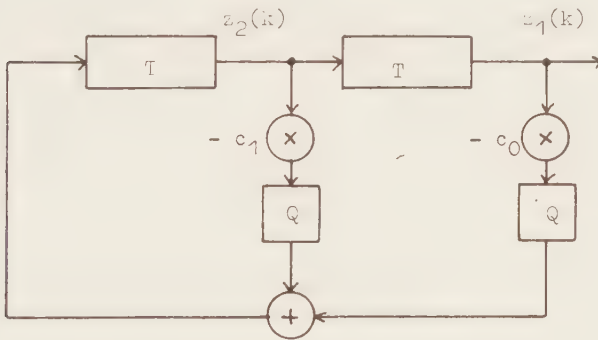


Bild 2.1 : Struktur eines rein rekursiven Teilfilters
2. Grades in der 2. kanonischen Form

Man kann sie ableiten aus der Struktur eines vollständigen Blocks 2. Grades in der 2. kanonischen Form /1/, wenn man den nichtrekursiven Teil wegläßt. Durch Vertauschen des Zustandsspeichers für $z_1(k)$ mit dem Multiplizierer des Koeffizienten c_0 (einschließlich Quantisierer) ändert sich innerhalb des Blocks weder das lineare noch das nichtlineare Verhalten. Ein weiteres Umzeichnen liefert dann den rein rekursiven Teil eines Blockes 2. Grades in der 1. kanonischen Form (Bild 2.2). Zwischen den Zustandsgrößen der Bilder 2.1 und 2.2 gelten dann die Beziehungen

$$x_1(k) = z_2(k)$$

$$x_2(k) = - [c_0 z_1(k)]_Q .$$

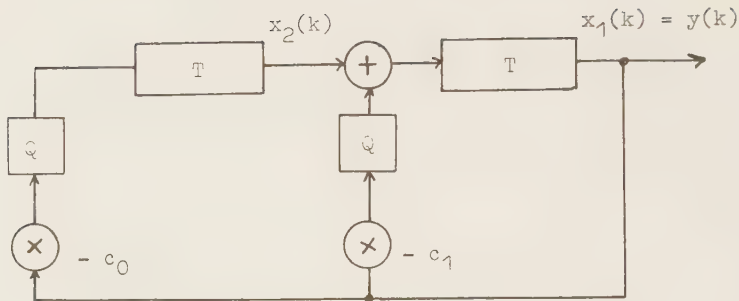


Bild 2.2 : Struktur des rekursiven Teils eines Blocks
2. Grades in der 1. kanonischen Form

Aus Bild 2.2 ist weiterhin abzulesen

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= -[c_1 x_1(k)]_Q + x_2(k) \\
 x_2(k+1) &= -[c_0 x_1(k)]_Q
 \end{aligned}
 \tag{2 -1}$$

Bei der Schaltungsrealisierung digitaler Filter in Festkommaarithmetik muß die Wortlänge der Produkte auf die Länge der Zustandsvariablen verkürzt werden. Dies kann z.B. durch Runden oder Betragsabschneiden (oft auch nur Abschneiden genannt) geschehen. In den Bildern 2.1 und 2.2 sind die Quantisierer für den Fall eingezeichnet, daß die einzelnen Produkte getrennt in der Wortlänge verkürzt werden. Bei den Zustandsgleichungen (2 -1) sind die nichtlinearen Quantisierungsoperationen mit dem Zeichen $[\cdot]_Q$ angedeutet.

Bei den in diesem Kapitel beschriebenen Untersuchungen ist ein Block 2. Grades in der 1. kanonischen Form verwendet, weil ein programmierbares digitales Filter in dieser Struktur /40/ für Messungen zur Verfügung stand. Die Ergebnisse gelten auf Grund der oben gezeigten Identität der rein rekursiven Filter 2. Grades auch für die 2. kanonische Form.

2.2 Messung der Extremwerte bei Runden und Vergleich mit theoretischen Abschätzungen

2.2.1 Abschätzung der Amplitude

Von den bekannten Amplitudenschranken für Grenzzyklen sollen hier die wichtigsten angegeben werden:

a) Bei Grenzzyklen der Periodenlänge $l_p \leq 2$ mit der Amplitude $|y|$ in Vielfachen von Q gilt nach (2 - 1)

$$|y| = [c_1 |y|]_R - [c_0 |y|]_R, \text{ oder} \\ |y| = |c_1| |y| + \Delta_1 - c_0 |y| + \Delta_0; |\Delta_0|, |\Delta_1| \leq 0,5.$$

Die Auflösung nach $|y|$ ergibt dann wie bei Jackson (y_J) in /5/

$$|y| \leq y_J = \frac{1}{1+c_0-|c_1|} \quad \text{für } l_p \leq 2. \quad (2 - 2a)$$

Stabile Schwingungen mit einer Periodenlänge $l_p \geq 3$ können in einem System 2. Grades nur bestehen, wenn ein komplexes Polpaar auf dem Stabilitätsrand liegt. Mit seinem "effective-value" Modell /5/ hat Jackson angenommen, daß im System anstatt $c_0 < 1$ der Koeffizient $c'_0 = 1$ wirksam ist. Es gilt dann bei Runden

$$[c_0 |y|]_R = c'_0 |y| \\ \text{oder } c_0 |y| + \Delta_0 = |y|; |\Delta_0| \leq 0,5.$$

Daraus folgt

$$|y| \leq y_J = \frac{0,5}{1-c_0} \quad \text{für } l_p \geq 3. \quad (2 - 2b)$$

Die Abschätzung (2-2b) ist heuristisch, weil zu ihrer Herleitung nur die nichtlinearen Effekte der Quantisierung am Produkt $c_0 \cdot y$ verwendet wurden. Die weiteren Eigenschaften des Systems bleiben unberücksichtigt. Es wurden sowohl in den hier beschriebenen Experimenten als auch z.B in /6,7/ Grenzzyklen gefunden, die y_J nach (2-2b) überschreiten. In /8/ wurde unterschieden zwischen "zugänglichen" Grenzzyklen mit Anfangswerten der Zustandsspeicher, die im Grenzzyklus selbst nicht vorkommen, und anderen "nicht zugänglichen" Grenzzyklen, die nur dann auftreten können, wenn der Anfangszustand im Zyklus selbst auch vorkommt. Es wurde weiter gezeigt, daß (2 - 2b)

die Amplitude des kleinsten zugänglichen Grenzzyklus ist /8/ .

Bei $l_p \geq 3$ ist also der Spitzenwert $|y|_{\max} \cong y_J$.

b) Unter Berücksichtigung der Rundung und bei zusammengefaßtem Rundungsfehler

$$|\Delta| \leq |\Delta_0| + |\Delta_1| \leq 1$$

erhält man aus der Zustandsdarstellung (2-1) für die Struktur nach Bild 2.2 mit $x_1(k) = y(k)$

$$y(k) + c_1 y(k-1) + c_0 y(k-2) = \Delta(k-1)$$

Bei bekannter Periodenlänge l_p entwickelt Hess eine Abschätzung folgendermaßen /6/ :

Es ist

$$y(k+1) + c_1 y(k+1-1) + c_0 y(k+1-2) = \Delta(k+1-1)$$

für $l = 1, 2, \dots, l_p$.

Wegen der Periodizität

$$y(k+l_p) = y(k)$$

$$\Delta(k+l_p) = \Delta(k)$$

gilt dann

$$\underline{C} \cdot \underline{y}(k) = \underline{\Delta}(k)$$

mit der Matrix

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & c_0 & c_1 \\ c_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & c_0 \\ c_0 & c_1 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & c_0 & c_1 & 1 \end{bmatrix}$$

und den Spaltenvektoren

$$\underline{y}(k) = [y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+l_p-1), y(k+l_p)]^T$$

$$\underline{\Delta}(k) = [\Delta(k), \Delta(k+1), \dots, \Delta(k+l_p-2), \Delta(k+l_p-1)]^T .$$

Nach Einsetzen der ungünstigsten Werte bei Runden ist $\underline{A}(k) = [1, 1, \dots, 1]^T$ und die Lösung

$$\underline{y}(k) = \underline{C}^{-1} \cdot \underline{A}(k) = \underline{y} \cdot \underline{A}(k)$$

liefert für die Elemente von $\underline{y}(k)$

$$y(k+1) = \sum_{i=1}^{l_p} v_{i1} \cdot A_i \leq \sum_{i=1}^{l_p} |v_{i1}| = \frac{\sum_{i=1}^{l_p} |\underline{C}|_{i1}|}{|\underline{C}|}$$

Dabei ist $|\underline{C}|$ die Determinante der Matrix $\underline{C}$ und $|\underline{C}|_{i1}$ die Adjunkte dieser Determinante zur i-ten Zeile und 1-ten Spalte /1/. Die Berechnung dieser absoluten Schranke erfordert also eine Matrixinversion, die für sehr viele Werte von l_p durchgeführt werden muß.

Bezüglich der heuristischen Abschätzung y_J für $l_p \geq 3$ haben Parker und Hess Beispiele gefunden, bei denen y_J überschritten wird /7/. In solchen Fällen springt c'_0 ab $|y| \geq y_{J+1}$ von 1 auf

$$c'_0 = \frac{|y|-1}{|y|},$$

solange

$$|y| \leq y_{PH} = \frac{1,5}{1-c'_0} \quad \text{bei } l_p \geq 3 \quad (2-3)$$

bleibt. Mit (2-3) ist eine weitere Abschätzung für die Grenzzyklusamplituden gefunden.

Der Koeffizientenbereich für im linearen Fall stabile Filter wurde von Rahman, Maria und Fahmy unterteilt in Gebiete, in denen wegen $l_p \leq 2$ die Schranke (2-2a) und Bereiche mit $l_p \geq 3$, in denen die Abschätzung (2-2b) gilt ; bzw. in denen eine größere Zahl z.B. nach (2-3) eingesetzt werden muß /9/ .

c) Der Effektivwert eines Grenzzyklus mit der Periode l_p ist allgemein

$$y_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{l_p} \sum_{l=1}^{l_p} y^2(k+l)}$$

Nach einem Theorem von Sandberg und Kaiser gilt bei Rundung /10/

$$y_{\text{eff}} \leq \max_{0 \leq \Omega \leq \pi} |H(e^{j\Omega})| \cdot \Delta_{\text{eff}}$$

wobei
$$H(z) = \frac{1}{z^2 + c_1 z + c_0}$$

die Übertragungsfunktion des rein rekursiven Systems 2. Grades ist.

Die Fehlerfolge $\Delta(k)$ wird näherungsweise als Sinusfolge aufgefaßt, so daß zur Abschätzung $\Delta_{\text{eff}} \approx 1/\sqrt{2}$ eingesetzt werden kann. Die Auswertung liefert dann

$$|y| = \frac{y_{\text{eff}}}{\Delta_{\text{eff}}} \leq y_{\text{SK}} = \begin{cases} \frac{1}{1+c_0-|c_1|} & \text{für } \begin{cases} c_0 \leq 0 & \text{oder} \\ c_0 > 0 & \text{und } |c_1| \geq \frac{4c_0}{1+c_0} \end{cases} \end{cases} \quad (2-4a)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{(1-c_0)\sqrt{1-c_1^2/(4c_0)}} & \text{für } \begin{cases} c_0 > 0 \\ \text{und } |c_1| < \frac{4c_0}{1+c_0} \end{cases} \end{cases} \quad (2-4b)$$

d) Aus Stabilitätsgründen gilt für die Impulsantwort $h_0(k)$ eines digitalen Systems /1/

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} |h_0(k)| < \infty \quad (2-5a)$$

Die Reaktion $y(k)$ auf ein Eingangssignal $u(k)$ unterliegt der Schranke

$$\left| y(k) \right|_{\max} \leq \left| u(k) \right|_{\max} \cdot S \quad (2-5b)$$

Bei einem Block 2. Grades ohne Erregung sind zwei Rundungsstellen mit der Fehleramplitude $|\Delta| \leq 1/2$ als Signalquellen wirksam. Daraus folgt $|y| \leq S$; S ist also eine absolute Schranke für Quantisierungsfehler (einschließlich Grenzzyklen) in Blöcken 2. Grades.

Um nun S als Funktion der Koeffizienten der Übertragungsfunktion darzustellen, kann man die inverse z -Transformation anwenden /1/. Man erhält (siehe /14,16/)

$$S = \begin{cases} \frac{1}{1+c_0-|c_1|}, & c_1^2 > 4c_0 \text{ und } c_0 > 0, \text{ oder } c_0 < 0, \\ & \text{verschiedene reelle Pole} \quad (2-6a) \\ \\ \frac{1}{(1-\sqrt{c_0})^2}, & c_1^2 = 4c_0, \text{ doppelte reelle Pole} \quad (2-6b) \\ \\ \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\rho_{\infty}^k}{\sin \psi_{\infty}} \sin(k+1)\psi_{\infty} \right|, & c_1^2 < 4c_0, \quad (2-6c) \\ & \text{konj. komplexe Pole} \end{cases}$$

dabei ist

$$\rho_{\infty} = \sqrt{c_0}$$

und

$$\psi_{\infty} = \arccos \frac{-c_1}{2\sqrt{c_0}}.$$

Die Übereinstimmung von (2-2a) bis (2-6a) zeigt, daß für reelle Pole alle Abschätzungen auf dieselbe Schranke führen, die nach der letzten Betrachtung zugleich eine absolute Schranke ist.

Dabei ist (2-6b) nur ein getrennt aufgeführter Sonderfall von (2-6a). Für die Formel (2-6c) existiert kein geschlossener Ausdruck. Abschätzungen von (2-6c) sind in der Literatur zu finden:

Von Appel /11/ wird angegeben

$$y_A = 1,11 \left[\frac{1}{\rho_\infty |\sin \psi_\infty|} \cdot \frac{\psi_\infty}{\psi_\infty^2 + (\ln \rho_\infty)^2} \cdot \frac{1 + \rho_\infty^{\pi/\psi_\infty}}{1 - \rho_\infty^{\pi/\psi_\infty}} \right] \quad (2-7)$$

Etwas übersichtlicher sind die Formeln von Ünver und Abdullah /12/. Sie geben zwei verschiedene Abschätzungen für (2 - 6c) an, nämlich

$$y_{ü1} = \frac{1}{|\sin \psi_\infty|} \cdot \frac{1}{1 - \rho_\infty} \quad (2-8)$$

und

$$y_{ü2} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{|\sin \psi_\infty|} \cdot \frac{1}{1 - c_0} \quad (2-9)$$

Die Näherung (2-9) ist dabei besser als (2-8) .

Eine weitere Abschätzung stammt von Chang/13/. Sie lautet

$$y_{CH} = \frac{\sin \psi_\infty + 4 \sin \frac{\psi_\infty}{2} \left(\frac{\rho_\infty^{N_1}}{1 - \rho_\infty^{N_1}} \right)}{\sin \psi_\infty (1 + c_0 - |c_1|)} \quad (2-10)$$

dabei ist N_1 der ganzzahlige Anteil von $\frac{\pi}{\psi_\infty}$

e) Für allgemeine Systeme n-ten Grades haben Yakowitz und Parker absolute Amplitudenschranken entwickelt, die nicht nur für Grenzzyklen, sondern für alle Quantisierungsfehler gelten /14,15/. Sie führen auf die Summe der Beträge der Impulsantworten und im Spezialfall eines Blocks 2. Grades auf S nach (2-5a). Unter Verwendung von (2-6a) sowie (2-6c) und (2-8) wird

$$j_{YP} = \begin{cases} \frac{1}{1 + c_0 - |c_1|} & \text{für } c_0 < 0 \text{ oder } c_1^2 \geq 4 c_0 > 0 \quad (2-11a) \\ \frac{1 + \sqrt{c_0}}{(1 - c_0) \sqrt{1 - c_1^2 / (4 c_0)}} & \text{für } c_1^2 < 4 c_0 \quad (2-11b) \end{cases}$$

Die absolute Schranke, die ähnlich wie die Matrix-Methode von Parker-Hess die Kenntnis der Periodenlänge l_p des Grenzyklus voraussetzt, stammt von Long und Trick /16, 17/.
Ausgehend von der Faltungsbeziehung

$$y(k_0) = \sum_{k=-\infty}^{k_0} h_0(k) \cdot \Delta(k_0 - k)$$

und unter Berücksichtigung der Periodizität des Fehlers Δ und des Signals y

$$\begin{aligned} \Delta(k + l_p) &= \Delta(k) \\ y(k + l_p) &= y(k) \end{aligned}$$

erhält man mit Hilfe der Substitution

$$k = m + i \cdot l_p \quad ; \quad m = 0, 1, \dots, l_p - 1$$

$$y(k_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l_p-1} h_0(m+i \cdot l_p) \cdot \Delta(k_0 - m - i \cdot l_p) .$$

Wegen $\Delta(k - i \cdot l_p) = \Delta(k)$ ist

$$y(k_0) = \sum_{m=0}^{l_p-1} \Delta(k_0 - m) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} h_0(m+i \cdot l_p) .$$

Bei Rundung mit zwei Quantisierern bleibt

$$|\Delta| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2| \leq 1 \quad ;$$

als Schranke ergibt sich

$$|y|_{\max} \leq \sum_{m=0}^{l_p-1} \left| \sum_{i=0}^{\infty} h_0(m + i \cdot l_p) \right| \quad .$$

Für allgemeines l_p führt die Residuenrechnung bei Blöcken 2. Grades in /16/ zu

$$|y|_{\max} \leq \sum_{m=0}^{l_p-1} \left| \frac{1}{2W} \left[\frac{(W - \frac{c_1}{2})^{m+1}}{1 - (W - \frac{c_1}{2})^{l_p}} - \frac{(-W - \frac{c_1}{2})^{m+1}}{1 - (-W - \frac{c_1}{2})^{l_p}} \right] \right| \quad (2-12a)$$

$$\text{mit} \quad W = \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0}$$

bei verschiedenen Polen von $H(z)$ und bei doppelten Polen zu

$$|y|_{\max} \leq \sum_{m=0}^{l_p-1} \left| \left(-\frac{c_1}{2}\right)^m \left[\frac{m}{1 - \left(-\frac{c_1}{2}\right)^{l_p}} + \frac{1 + \left(-\frac{c_1}{2}\right)^{l_p} (l_p - 1)}{\left[1 - \left(-\frac{c_1}{2}\right)^{l_p}\right]^2} \right] \right| \quad (2-12b)$$

Setzt man in (2-12a) $l_p \leq 2$ ein, so führt dies wieder auf die Beziehung (2-11a) .

Die Auswertung der Schranken (2-12a,b) scheint etwas einfacher zu sein, als die Berechnung nach der Matrixmethode von Hess. Hier braucht keine Matrizeninversion durchgeführt werden; die Koeffizienten der Übertragungsfunktion können direkt eingesetzt werden.

Gemeinsam haben beide Methoden den Nachteil, daß die Periode l_p bekannt sein muß.

Für den allgemeinen Fall einer unbekannten Periodenlänge schätzen Long und Trick die Amplitude von Grenzzyklen ebenfalls mit

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} |h_0(k)|$$

ab und geben die Beziehungen (2-11a,b) als absolute Schranken an.

2.2.2 Meßaufbau und untersuchte Pollagen

Der für die Untersuchungen benutzte Meßaufbau ist im Bild 2.3 zu sehen. Das rekursive digitale Filter wird als Block 2. Grades programmiert durch Einlesen der entsprechenden Koeffizienten.

Um nun den größten vorkommenden Grenzzyklus sicher zu finden, müßte man das Filter (bei Eingangssignal $u(k)=0$) mit definierten Werten in den Zustandsspeichern starten. Dieses Verfahren ist sehr mühsam und zeitraubend, da zum einen der gesamte zweidimensionale Zustandsraum abgesucht werden muß und außerdem das vorhandene digitale Filter nur etwas umständlich mit vorgegebenen Anfangswerten der Zustandsvariablen gestartet werden kann.

Wesentlich einfacher ist es, das Filter kurze Zeit zu erregen (z.B. mit einem Rausch- oder Sinussignal) und in einem willkürlichen Zeitpunkt die Erregung abzuschalten. Das Filter schwingt dann aus; es geht aber i.a. nicht nach Null (trotz Koeffizienten im Stabilitätsdreieck, siehe /1/), sondern läuft in einen Grenzzyklus ein (siehe Bilder 2.4 und 2.5). Bei mehrmaliger (≈ 50 maliger) Wiederholung dieses Vorgehens (mit variierender Amplitude und verschiedenen Signalen) findet man mit sehr großer Wahrscheinlichkeit alle Grenzzyklen und dabei erfahrungsgemäß auch den mit der größten Amplitude.

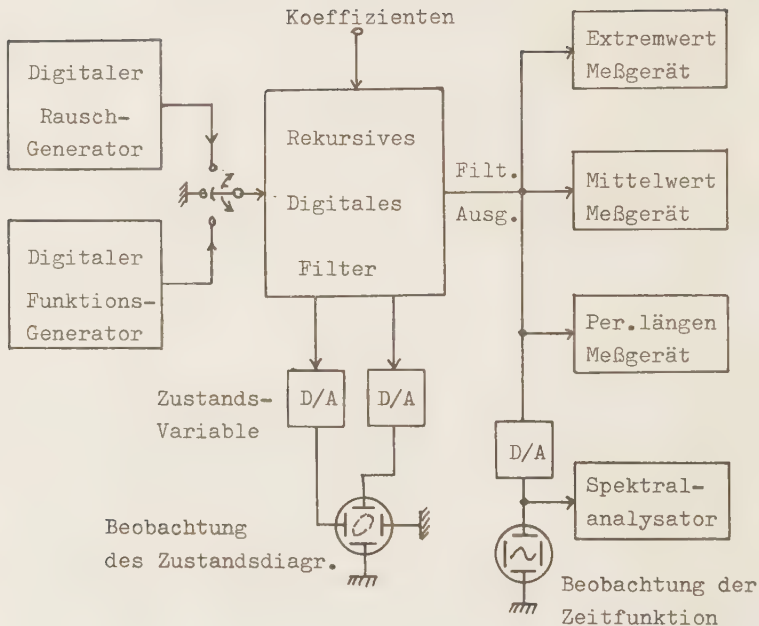


Bild 2.3 : Meßaufbau zur Analyse von Grenzzyklen

Das am Filterausgang anliegende Signal $y(k)$ wird zur Auswertung verschiedenen Meßgeräten zugeführt. Das Extremwertmeßgerät zeigt $|y|_{\max}$ an; am Mittelwertmeßgerät kann die mittlere Leistung $\overline{y^2}$ abgelesen werden. Diese beiden Geräte zusammen mit den erwähnten Signalgeneratoren sind u.a. in /18/ und /19/ beschrieben. Das Periodenlängenmeßgerät /20/ zählt die Anzahl

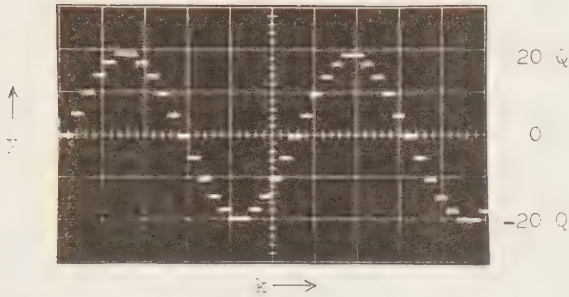


Bild 2.4 : Zeitverlauf eines Grenzzyklus

$$c_0 = 0,974 ; c_1 = -1,917$$

$$\varphi_\infty = 0,9859 ; \gamma_\infty = 13,782^\circ$$

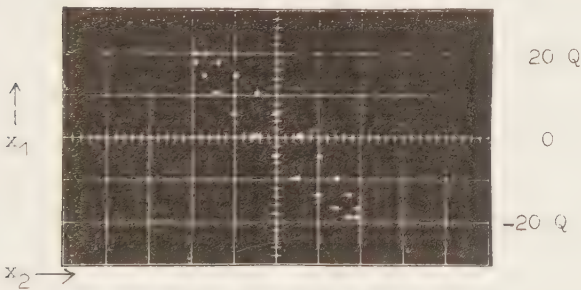


Bild 2.5 : Zustandsdiagramm eines Grenzzyklus

$$c_0 = 0,974 ; c_1 = -1,917$$

$$\varphi_\infty = 0,9859 ; \gamma_\infty = 13,782^\circ$$

der Abtastwerte pro Periode und mit dem Spektralanalysator wird der jeweilige Grenzzyklus auf Harmonische und Subharmonische untersucht. Die beiden Oszilloskope dienen zur Überwachung des Signalverlaufs.

Um nun die Amplituden von Grenzzyklen in rekursiven Filtern 2.Grades mit konjugiert komplexen Polen untersuchen zu können, wurde das Innere des Einheitskreises mit einem Punktraster von Pollagen versehen /21/. Die Punkte liegen auf konzentrischen Kreisen (siehe Bild 2.6) mit dem Radius $\varrho_\infty = |z_\infty|$. Der Polwinkel ist γ_∞ . Die Menge der systematisch untersuchten Pole

wurde erhalten durch Variation der Parameter β_∞ und γ_∞ .
Für

$$0,5 \leq \beta_\infty \leq 0,9 \quad ,$$

betrug die Schrittweite 0,1 und im Bereich

$$0,9 \leq \beta_\infty \leq 0,99$$

wurde sie reduziert auf 0,01 .

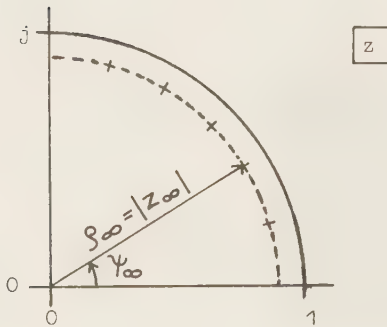


Bild 2.6 :
Untersuchte Pollagen

Da die Pole im 2.Quadranten durch Spiegelung an der imaginären Achse aus den Polstellen im 1.Quadranten (Vorzeichenumkehr von c_1) erzeugt werden können, ist ein symmetrisches Verhalten der Grenzzyklusamplituden zu erwarten. Diese Symmetrie konnte auch experimentell gezeigt werden. Als Konsequenz daraus wurde γ_∞ nur im Bereich

$$0^0 \leq \gamma_\infty \leq 90^0$$

in Schritten von 5^0 variiert. Stichprobenartig und in Fällen, wo die Auflösung zu grob war, wurden sicherheitshalber auch Pole zwischen diesem Punktraster untersucht. Die Filterkoeffizienten erhält man aus den Gleichungen

$$c_0 = \vartheta_{\infty}^2$$

$$c_1 = -2 \vartheta_{\infty} \cos \psi_{\infty}$$

2.2.3 Meßergebnisse und Vergleich mit theoretischen Schranken

Wegen der besseren Übersichtlichkeit und der größeren Aussagekraft werden die Ergebnisse in Kurvenform dargestellt. Von den unter 2.2.1 dargestellten theoretischen Schranken wurden die in der Tabelle 2.1 aufgeführten berücksichtigt. In den Bildern 2.7 bis 2.9 wird dabei nur eine Auswahl aus der Vielzahl von Meßwerten wiedergegeben. Diese Auswahl wurde aber so getroffen, daß das charakteristische Verhalten daraus zu erkennen ist.

Lit.-Stelle	Gleichgs.-Nr.	Bezeichnung	Autoren
/5/	(2-2b)	γ_J	Jackson
/6,7/	(2-3)	γ_{PH}	Parker/Hess
/10/	(2-4b)	γ_{SK}	Sandberg/Kaiser
/14,15/	(2-11b)	γ_{YP}	Yakowitz/Parker
-	(2-6c)	S	-
/11/	(2-7)	γ_A	Appel

Tabelle 2.1 : Liste der in den Bildern 2.7 bis 2.9 eingezeichneten Amplitudenschranken.

In den Bildern 2.7 bis 2.9 sind für $\vartheta_{\infty}=0,9$ sowie 0,95 und 0,99 die theoretischen Abschätzungen (durchgezogen) und die Meßkurve M (strichliert) über dem Winkel ψ_{∞} logarithmisch aufgetragen. Eine 1 neben einem Meßpunkt bedeutet, daß der größte gefundene Grenzzyklus die Periode 1 hat.

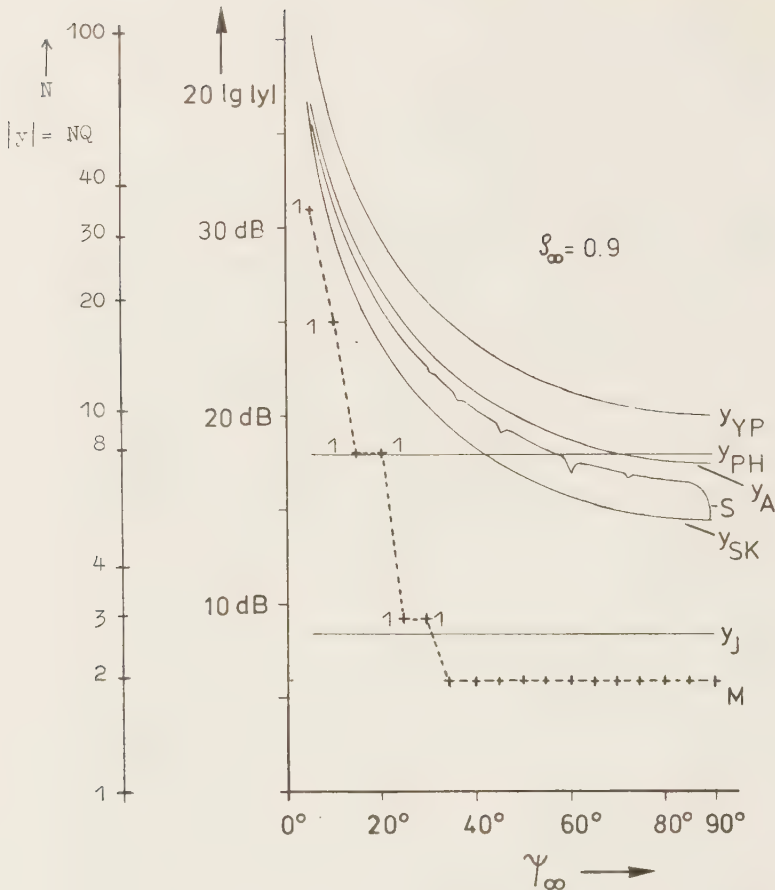


Bild 2.7 : Theoretische Schranken und gemessene größte Grenzzyklen bei $\xi_\infty = 0,9$

Wie schon unter 2.2.1 erwähnt wurde, sind y_A und y_{YP} Abschätzungen der absoluten Schranke S , weshalb sie im Bild 2.7 auch oberhalb von S liegen. Die spitzen Einbrüche im Verlauf des numerisch bestimmten S treten auf, wenn bei $\gamma_\infty = \nu \pi / N$ die Funktion $\sin(k+1)\gamma_\infty$ nur endlich viele Werte annimmt. Z.B. entsteht bei $\sin(k+1)\gamma_\infty = 0, 1, 0, -1$ mit $\xi_\infty = 0,9$ anstatt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \xi_\infty^k = \frac{1}{1-0,9} \quad \text{der Wert} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \xi_\infty^{2k} = \frac{1}{1-0,81}$$

in der Formel (2-6c) für S .

Im Vergleich mit den Meßwerten ist S bereits sehr pessimistisch. Deshalb scheinen S , y_A , und y_{YP} wenig brauchbar. Unterhalb von S , aber immer noch mit großem Abstand zu den Meßwerten M , liegt y_{SK} .

Die heuristisch hergeleitete Abschätzung y_J trifft bei $\rho_\infty = 0,9$ für Grenzzykklusperioden $l_p \geq 3$ zu. Für $l_p = 1$ und 2 ist nach Jackson die absolute Schranke für reelle Pole (2-2a) anzuwenden. Die Brauchbarkeit der Abschätzung y_J wird dadurch stark verringert, denn im Entwurfstadium (für das man die Amplitudenschranken braucht) weiß man im allgemeinen die Periodenlänge l_p nicht.

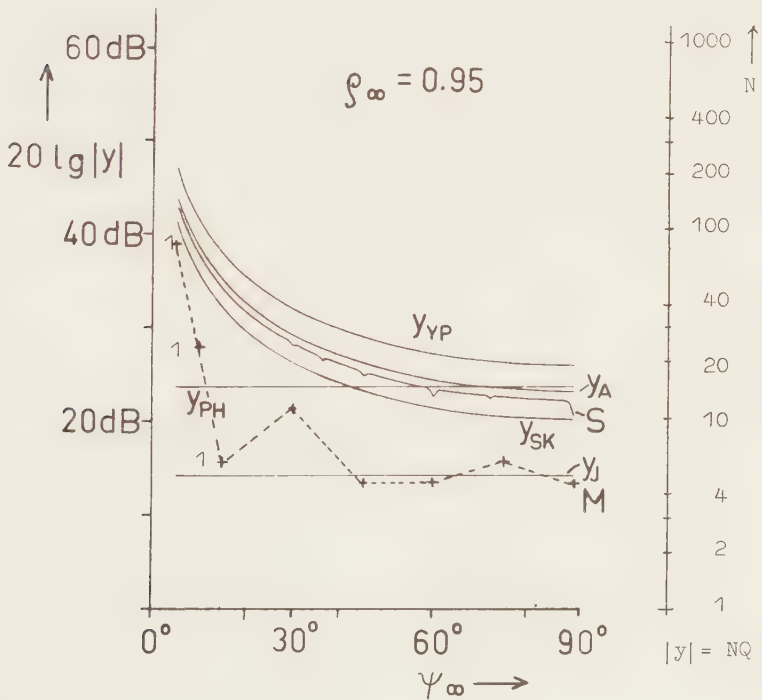


Bild 2.8 : Theoretische Schranken und gemessene größte Grenzzyklen bei $\rho_\infty = 0,95$

In den Bildern 2.8 ($\rho_{\infty} = 0,95$) und 2.9 ($\rho_{\infty} = 0,99$) ist grundsätzlich das gleiche Verhalten der Abschätzung zu sehen.
Die Amplituden

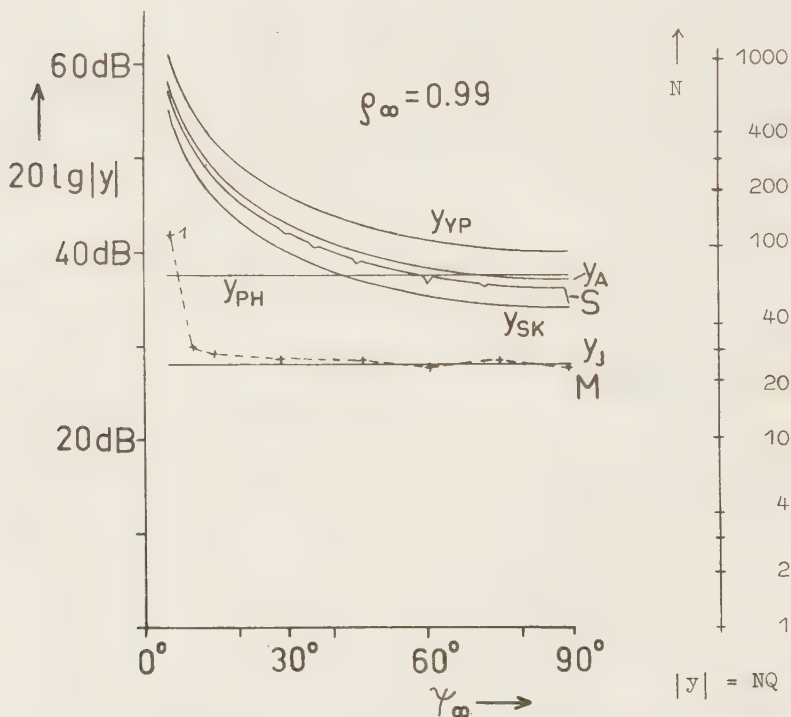


Bild 2.9 : Theoretische Schranken und gemessene größte Grenzzyklen bei $\rho_{\infty} = 0,99$

nehmen zu mit der Polgüte. An einigen Punkten überschreiten die Meßwerte M die Schranke y_J (bei $\gamma_{\infty} = 30^\circ, 75^\circ$ in Bild 2.8 und meistens bei $\gamma_{\infty} \geq 10^\circ$ in Bild 2.9), aber nie y_{SK} , das etwa 2dB unterhalb von S liegt.

Die Formel y_J von Jackson liefert also einen relativ guten Schätzwert für die meistens tatsächlich auftretenden Grenzzyklen solange $\rho_{\infty} \lesssim 0,9$ bleibt. Er ist aber z.B. bei $\rho_{\infty} = 0,95$ und $\gamma_{\infty} = 30^\circ$

um den Faktor 2.34 zu klein. Von Hess /6/ und mit den sogenannten "rolling-pin" Grenzzyklen (siehe Abschnitt 2.4) von Mina und Lawrence /22,24/ wurden Abweichungen bis etwa zum Faktor 3 festgestellt. Wenn man eine sichere Schranke errechnen will, muß man also mindestens die Formel y_{SK} von Sandberg und Kaiser bzw. y_{PH} von Parker und Hess verwenden. Eine Aufteilung des gesamten Gebiets in Untergebiete mit Anwendung bestimmter verschiedener Schranken in diesen Regionen führt zu einer besseren Abschätzung, die dann allerdings mit Hilfe mehrerer Formeln darzustellen ist. Die Zusammenstellung einer solchen kombinierten Abschätzung erfolgt im Abschnitt 2.6 .

2.3 Messung der Periodenlänge bzw. der dominierenden Frequenz

2.3.1 Grundsätzliche Bemerkungen

Bei Polwinkeln $\psi_{\infty} < 90^\circ$ und relativ kleinem Polradius $\rho_{\infty} \leq \sqrt{0,75}$ treten meistens Grenzzyklen auf, bei denen bezüglich der dominierenden Frequenz f_d und der Periodenlänge l_p im Zusammenhang mit der Abtastfrequenz f_A gilt

$$\frac{f_d}{f_A} = \frac{1}{l_p} \quad . \quad (2 - 13)$$

Das bedeutet, daß die Anzahl der Werte innerhalb von drei Nulldurchgängen (= 1 Periode = f_A/f_d) gleich der Periodenlänge l_p ist. Der Grenzzyklus schließt sich in der Zustands-ebene nach genau einem Umlauf (siehe Bild 2.5).

Bei kritischen Polen und auch bei größeren Polwinkeln treten neben der dominierenden Frequenz f_d und ihren Oberwellen auch Subharmonische f_S auf. Das beruht darauf, daß die Periodenlänge des Grenzzyklaus ein ganzzahliges Vielfaches von

f_d/f_d sein kann. Der Grenzzzyklus in der Zustandsebene schließt sich erst nach mehreren Umläufen. Die dominierende Frequenz f_d wird dabei in der Nähe der Polfrequenz f_p liegen. Näherungsweise kann man den Zusammenhang mit der Formel

$$f_d = m \cdot f_S \approx f_p, \quad m > 0, \quad m \in \mathbb{N} \quad (2-14)$$

beschreiben /23/ .

2.3.2 Meßaufbau und untersuchte Pollagen

Für die Messung der Frequenzkenngrößen von Grenzzyklen wurde wieder der in Bild 2.3 gezeigte Aufbau verwendet. Es hat sich dabei als praktisch erwiesen, bei der Auswahl der untersuchten Pollagen nicht von der z -Ebene auszugehen, sondern ein Raster äquidistanter Punkte über das Dreieck für stabile Koeffizienten $/1/$ in der c_0 - c_1 Ebene zu legen (siehe Bild 2.10) .

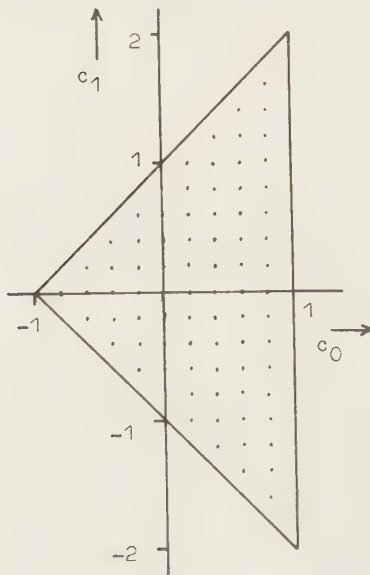


Bild 2.10 :
Prinzip der Stützpunktwahl
für Periodenmessungen

Der Abstand der Stützpunkte sowohl im horizontaler als auch in vertikaler Richtung wurde zu 0,05 gewählt. Die Abgrenzungen einzelner Teilgebiete wurden aber wesentlich genauer aufgelöst.

2.3.3 Darstellung der Meßergebnisse

Im gesamten Dreieck von Koeffizienten, die im linearen Fall zu stabilen Filtern führen (siehe Bild 2.10) sind die Bereiche, in denen die größten Grenzzyklen jeweils gleiche Periodenlängen aufweisen, sehr stark abhängig vom Koeffizienten c_0 . Im folgenden werden deshalb zuerst die grob strukturierten Bereiche angegeben und dann Erweiterungen für $c_0 \geq 0,75$ behandelt.

Im Bild 2.11 sind für $c_0 \leq 0,75$ mit den dicken durchgezogenen Linien die Abgrenzungen der Bereiche angegeben, in denen die größten Grenzzyklen gleiche Periodenlängen haben. Für $c_0 > 0,75$ ist der weitere Verlauf der Grenzen strichliert angedeutet; er wird noch genauer angegeben werden. Als zusätzliche Information enthält Bild 2.11 die Parabel $c_1^2 = 4 c_0$, die die Grenze zwischen reellen und komplexen Polen darstellt und die Kurve

$$|c_1| = \frac{4c_0}{1+c_0}$$

aus der Sandberg - Kaiser - Abschätzung (2 - 4a,b). Für den Bereich $c_1^2 \leq 4c_0$ wurden im Bild 2.12 die Abgrenzungen in die z - Ebene der komplexen Polstellen übertragen. Aus beiden Bildern ist zu ersehen, daß die wenigen unterschiedlichen Periodenlängen jeweils einen relativ großen Einzugsbereich von möglichen Polstellen aufweisen. Besonders auffällig ist dabei die starke Vergrößerung der Bereiche, in denen wegen $l_p \leq 2$ die Amplitudenschranke (2-4a) gilt, gegenüber dem von Sandberg und Kaiser /10/ angegebenen Gebiet

$$|c_1| = 4c_0/(1+c_0) \quad .$$

Bezüglich der Amplituden reicht im gesamten Bereich $c_0 < 0,75$

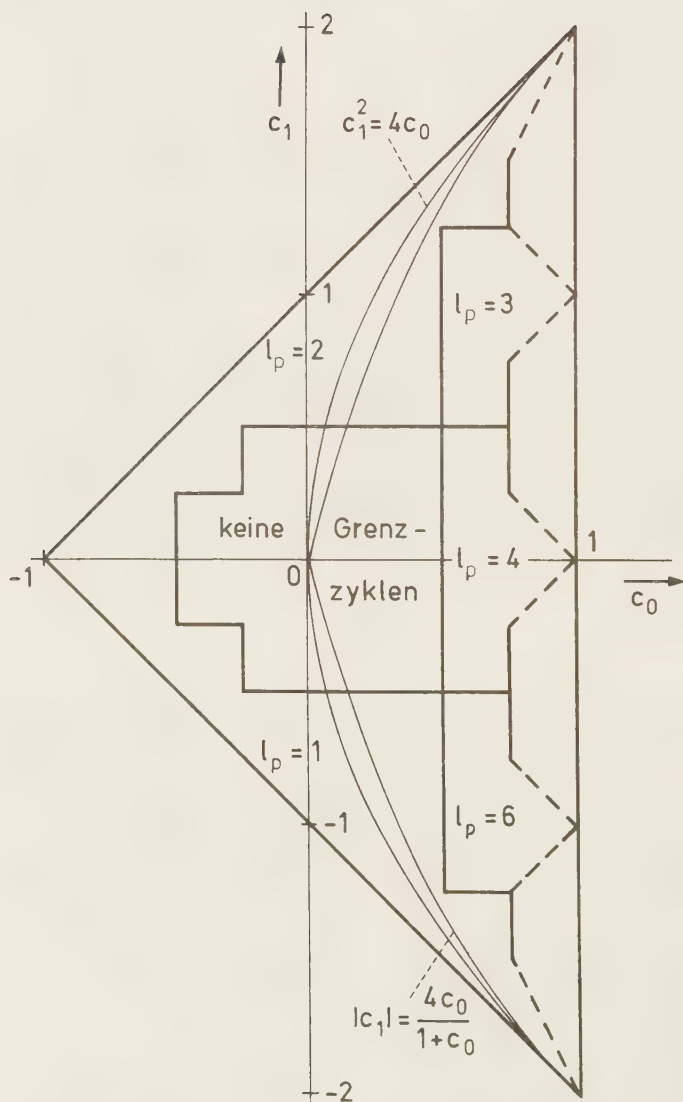


Bild 2.11 : Periodenlängen der Grenzzyklen maximaler Amplitude für $c_0 \leq 0,75$

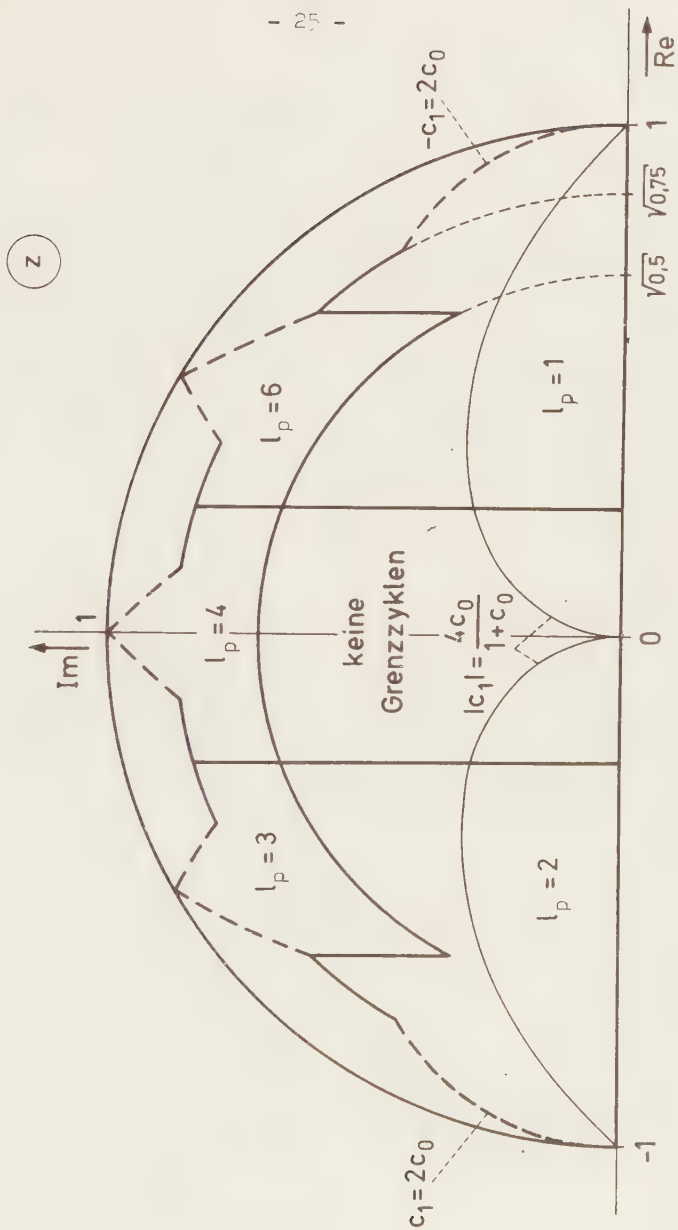


Bild 2.12 : Periodenlängen der Grenzzyklen maximaler Amplitude für $c_0 \leq 0,75$

die Abschätzung von Jackson aus, d.h. es gilt die Gleichung (2-2a) für $l_p \leq 2$, bzw. (2-2b) für die Periodenlängen 3, 4 und 6.

Für den Bereich $0,5 \leq c_0 \approx 0,9$ sind im Bild 2.13 die Einzugsgebiete der Periodenlängen der größten Grenzzyklen eingezeichnet. Eine systematische Untersuchung für $c_0 > 0,9$ führt zu so kleinen Gebieten, daß sie zeichnerisch nicht mehr dargestellt werden können. Im angegebenen Koeffizientenbereich treten häufig Grenzzyklen auf, die sich nach mehreren Umläufen schließen. Es wurde deshalb mit l_p/m die Periodenlänge l_p bezogen auf die Umlaufzahl m im Bild 2.13 eingetragen. Nach (2-14) erhält man also die dominierende Frequenz aus

$$f_d = m \cdot f_s = \frac{m}{l_p} \cdot f_A \quad (2-15)$$

Die hier experimentell ermittelten Gebietsgrenzen für $l_p=1,2,3,4$ und 6 sind in Form von Ungleichungen mathematisch formulierbar/9/, und in der Tabelle 2.2 zusammengefaßt. Im verbleibenden Bereich ohne Angaben im Bild 2.13 erhält man für die dominierende Frequenz bereits gute Ergebnisse mit der experimentell gefundenen Näherung

$$f_d \approx f_p \quad , \quad (2-16)$$

wobei
$$f_p = \frac{f_A}{2\pi} \cdot \arccos \frac{c_1}{2\sqrt{c_0}}$$

die Polfrequenz ist. In gewissen Bereichen der Koeffizientenebene (schattiert im Bild 2.13) tritt eine Form von Grenzzyklen auf, die im folgenden Abschnitt behandelt wird.

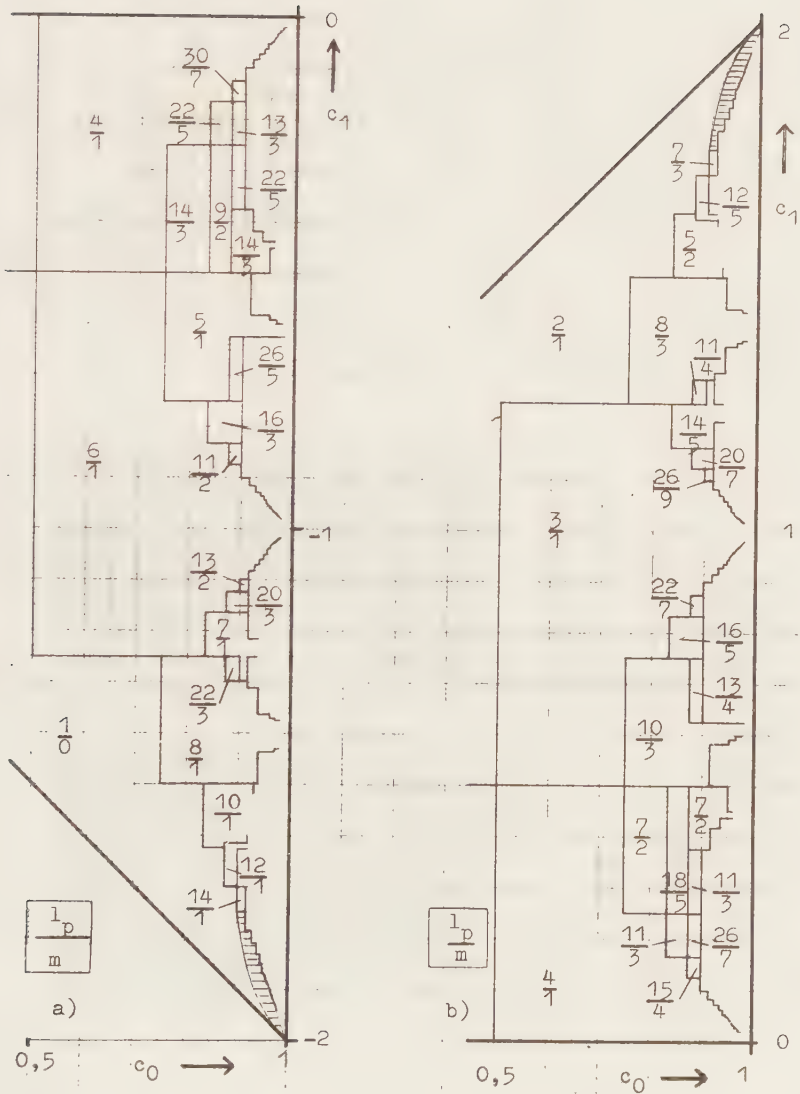


Bild 2.13 : Periodenlängen der größten Grenzzyklen für $c_0 > 0,5$.

Symmetrie der Frequenzen :

$$\left[\frac{m}{l_p} \right]_{c_1} + \left[\frac{m}{l_p} \right]_{-c_1} = \frac{1}{2}$$

l_p	Grenzen für c_1	Grenzen für c_0
1,2	$1+c_0 > c_1 \geq 2 - \frac{3}{2N}$	$c_0 < 1 - \frac{1}{2N}$
3,6	$1 + \frac{1}{2N} > c_1 > 1 - \frac{1}{2N}$	$1 - \frac{1}{2N} \leq c_0 < 1 - \frac{1}{2(N+1)}$
4	$\frac{1}{2N} > c_1 $	$1 - \frac{1}{2N} \leq c_0 < 1 - \frac{1}{2(N+1)}$
$N = 1, 2, 3, \dots$		

Tabelle 2.2 : Gebietsgrenzen für $l_p = 1, 2, 3, 4$ und 6 .

2.4 Sonderform von Grenzzyklen

Bei den systematischen Untersuchungen wurden auch Grenzzyklen erfaßt, die nicht sinusförmig verlaufen, sondern aus linearen Teilstücken zusammengesetzt scheinen (siehe Bild 2.14).

In der Literatur wurde diese Art von Grenzzyklen erstmalig in /24/ und /22/ erwähnt. Wegen des nadelholzartigen Aussehens im Zustandsdiagramm (Bild 2.14b) wurden sie dort "rolling-pins" genannt. Nach den Angaben in /24/ kann man solche Grenzzyklen in Gebieten mit den folgenden Koeffizienten finden:

$$1 - \frac{1}{2N_J} \leq c_0 < 1 - \frac{1}{2(N_J+1)} \quad (2-17a)$$

$$2 - \frac{3}{2(N_i-1)} \leq |c_1| < 2 - \frac{3}{2N_i} \quad (2-17b)$$

Die Parameter N_J und N_i sind zu bestimmen aus

$$N_J = \frac{LM}{2} + \frac{L(L-1)}{2} - 1 \quad (2-18)$$

$$N_i = 3 \left(\frac{LM}{2} - L + 1 \right) + i ; \quad i = 1, 2, \dots, 3(L-2) \quad (2-19)$$

Dabei sind

L die Schrittweite im Körper

M die Anzahl der Schritte der Größe L

N_1 die möglichen Maximalwerte des Grenzzyklus

N_J die Jackson-Abschätzung $\left[\frac{0,5}{1-c_0} \right] = [y_J]^*$

Die Schrittweite im Griff ist nach /24/ gleich 1. Für ungerades LM sind dabei

$\frac{LM}{2}$ durch $\frac{LM-1}{2}$ und $L-2$ durch $L-3$ zu ersetzen.

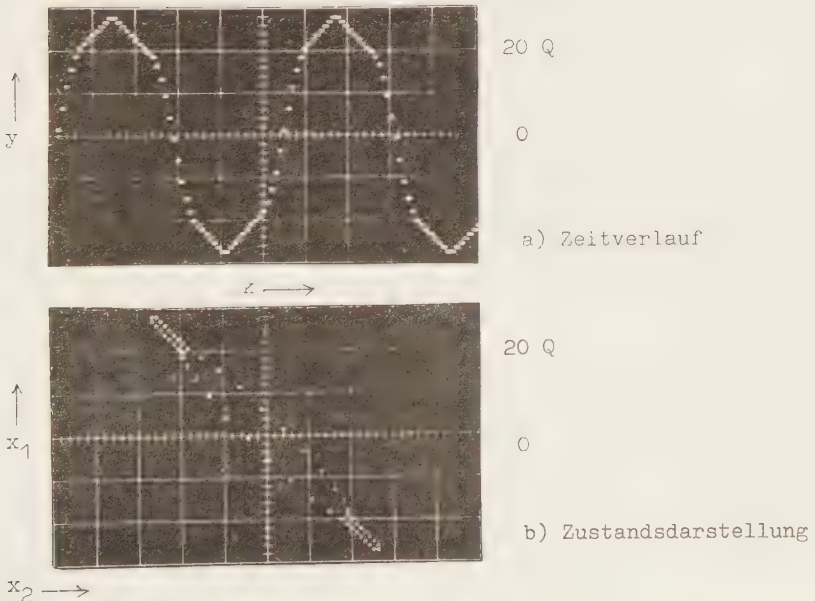


Bild 2.14 : " Rolling - pin " Grenzzyklus

$$L = 5, M = 4, c_0 = 0,974, c_1 = -1,944$$

$$\xi_\infty = 0,9869, \gamma_\infty = 3,6724^\circ$$

*) $[X]$ ist der ganzzahlige Anteil von X

Aus diesen wenigen Angaben kann man nun folgendes ableiten:

$$\text{Wegen } \frac{N_i}{N_J} \leq 3 \cdot \frac{\frac{LM}{2} - 1}{\frac{LM}{2} + \frac{L(L-1)}{2} - 1} = 3 \cdot \frac{1}{1 + \frac{L(L-1)}{LM-2}}$$

ist zu ersehen, daß Maximalwerte dieser Grenzzyklen der Schranke

$$N_i \max < 3 \cdot N_J \leq y_{PH} \quad (2-20)$$

unterliegen. Sie werden also mit der Abschätzung y_{PH} von Parker und Hess erfaßt. In Gleichung (2-19) ist (laut /24/) $i = 0$ nicht zugelassen, so daß

$$L \geq 3 \quad (2-21)$$

sein muß.

Als Beispiele sind in der Tabelle 2.3 einige Kombinationen von L und M zusammengestellt. Die Bereiche von c_0 und (da diese "rolling-pin" Grenzzyklen sowohl bei negativem als auch bei positivem c_1 auftreten) auch die Bereiche von $|c_1|$ wurden zusammen mit den Extremwerten $N_i \min$ und $N_i \max$ in die Tabelle eingetragen.

Die errechneten Beispielgebiete wurden für $c_1 < 0$ in Bild 2.15 eingetragen. Die einzelnen rechteckigen Kästchen sind dabei mit (L, M) gekennzeichnet.

Bei der meßtechnischen Überprüfung dieser Gebiete hat sich aber ergeben, daß "rolling-pin" Grenzzyklen nur innerhalb des Gebiets zwischen den strichlierten Kurven existieren, also für

$$2 - 3(1 - c_0) < |c_1| < 2 - \frac{1}{\frac{1}{1 - c_0} - 6} \quad (2-22a)$$

Das sind die Kurven in der c_0 - c_1 -Ebene, auf denen die rechten oberen bzw. die linken unteren Ecken der Gebiete mit "rolling - pins" liegen (siehe Bild 2.15).

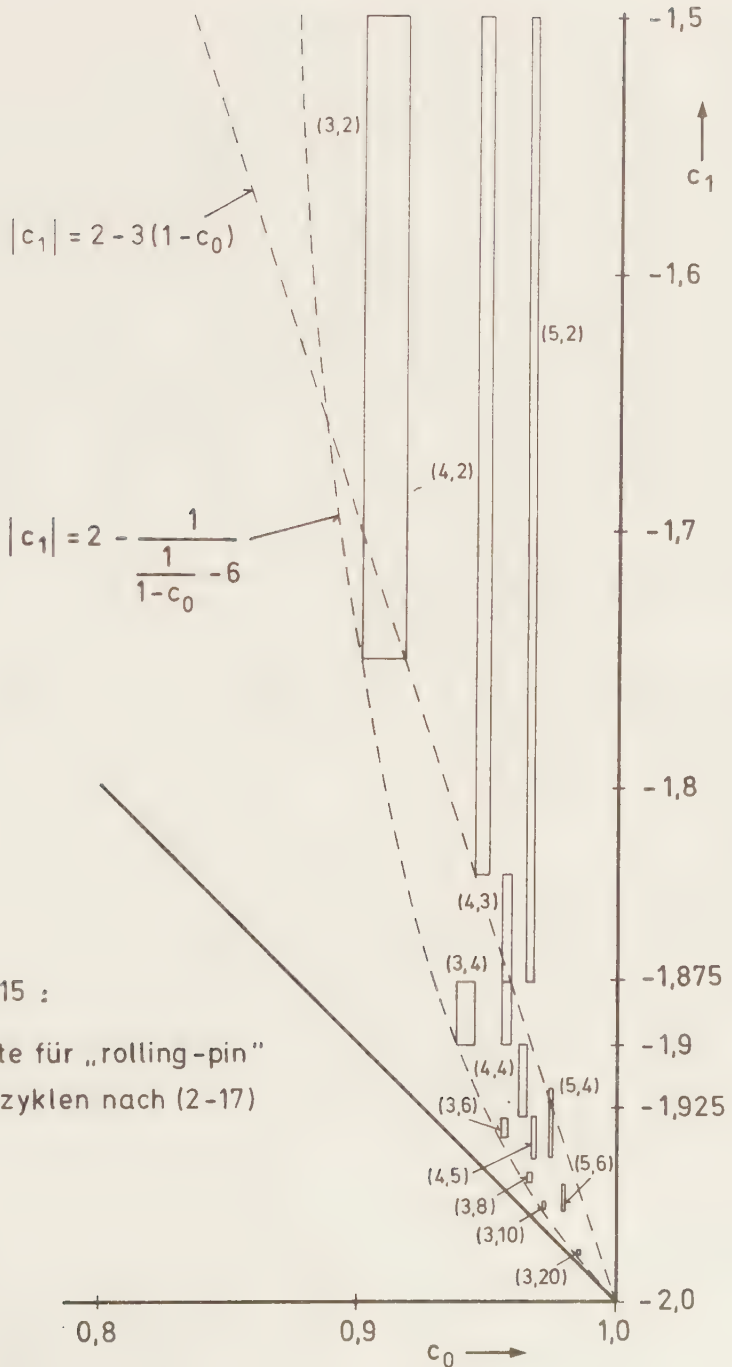


Bild 2.15 :

Gebiete für „rolling-pin“
Grenzzyklen nach (2-17)

L	M	N _J	N _i min	N _i max	c ₀	c ₁
3	2	5	4	6	0,9 0,9166...	1,5 1,75
3	4	8	13	15	0,9375 0,9444...	1,875 1,9
3	6	11	22	24	0,9545 0,9583..	1,9286. 1,9375
3	8	14	31	33	0,9643 0,9666...	1,95 1,9546.
3	10	17	40	42	0,9706. 0,9722.	1,9615. 1,9643.
3	20	32	85	87	0,9844...0,9849.	1,9821 1,9828.
4	2	9	4	9	0,9444...0,95	1,5 1,8333...
4	3	11	10	15	0,9545 0,9583	1,8333...1,9
4	4	13	16	21	0,9615 0,9643	1,9 1,9286.
4	5	15	22	27	0,9666...0,96875	1,9286. 1,9444...
5	2	14	4	12	0,9643. 0,9666...	1,5 1,875
5	4	19	19	27	0,9737. 0,975	1,9166...1,9444...
5	6	24	34	42	0,9792. 0,98	1,9545.. 1,9643.

Tabelle 2.3 : Beispiele von Koeffizientenbereichen mit "rolling-pin " Grenzzyklen nach /24/.

Die Angabe der genaueren treppenförmigen Begrenzung lautet

$$2 - \frac{3}{2(N_J+1)} < |c_1| < 2 - \frac{1}{2(N_J - \frac{L(L-1)}{2})} \quad (2-22 \text{ b})$$

für $L \geq 3$.Die aus /24/ stammende Beziehung (2-17) liefert also auch Gebiete,in denen gar keine " rolling-pins " vorkommen. Auf den Grund dafür wird noch im Abschnitt 2.5 eingegangen werden.Als Beispiel für dieses Verhalten sei erwähnt, daß die in den Bildern 2.4 und 2.5 bzw. 2.14 gezeigten Grenzzyklen mit Koeffizienten erzeugt werden, die alle innerhalb des Bereiches $(L,M) = (5,4)$ im Bild 2.15 liegen, wobei die Parameter c_1 aber für Bild 2.4 am oberen bzw. für Bild 2.14 am unteren Rand des Rechtecks gewählt wurden.

2.5 Theoretische Betrachtungen über Grenzzyklen

Mit den hier angestellten Überlegungen wird versucht, alle Arten von Grenzzyklen mit einer einheitlichen Methode theoretisch zu analysieren. Die Aussagen über Amplitude und Koeffizientenbereich werden herangezogen zur Erklärung und zum Vergleich mit den Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen. Bezüglich der Periodenlänge werden die Fälle $l_p \leq 2$ und $l_p \geq 3$ unterschieden.

Die hier angewandte und weiterentwickelte Methode der "wirksamen Koeffizienten" beruht im Prinzip auf der "effective-value" Behandlung des Systemparameters c_0 , mit der Jackson seine heuristische Amplitudenabschätzung hergeleitet hat /5,1/. Die Entstehung von Grenzzyklen in rekursiven Systemen 2. Grades wird dabei dadurch erklärt und beschrieben, daß die echten Koeffizienten c_0 und c_1 durch die wirksamen Werte c_0' bzw. c_1' ersetzt werden, für die das System bedingt stabil wird.

Wir spalten hier in Fälle auf, in denen die wirksamen Koeffizienten in allen l_p Zuständen eines Grenzzyklus konstant bleiben, und in andere Fälle, in denen die wirksamen Koeffizienten vom Momentanwert des Signals y abhängen, also variabel sind.

Als Beispiel sei das Produkt $c_0 \cdot y$ betrachtet. Infolge der Rundung ergibt sich

$$[c_0 \cdot y]_R = c_0' \cdot y,$$

wobei die Fälle

- a) $c_0' = 1$ und
- b) $c_0' = [c_0 \cdot y]_R / y = f(c_0, y) < 1$

zu unterscheiden sind. Im Fall a), dem ursprünglichen Modell von Jackson, hängt der sich ergebende effektive Wert c_0' nicht von den während des Grenzzyklus auftretenden Werten von y ab; im Fall b) wird die Wirkung der Rundung als eine in l_p periodische Veränderung von c_0' interpretiert. Entsprechend kann man natürlich das Produkt $[c_1 \cdot y]_R = c_1' \cdot y$ behandeln.

2.5.1 Konstante wirksame Koeffizienten (Fall a)

Das wirksame System hat ein konjugiert komplexes Polpaar, wenn bei $c_0' = 1$ noch $|c_1'| < 2$ bleibt. Die Pole werden reell, wenn

entweder $|c_1'| = 2$ ist, oder wenn mit $|c_0'| < 1$ das wirksame $|c_1'| = 1 + c_0'$ wird.

$$2.5.1.1 \quad c_0' = 1 ; \quad |c_1'| < 2$$

Es gilt bei Rundung und ganzzahligem y

$$c_0' \cdot |y| \pm \Delta_0 = c_0' \cdot |y| = |y| \quad \text{mit } \Delta_0 \leq 0,5$$

$$\text{also } c_0' = 1 \text{ f\"ur } |y| \leq N_J = [y_J] ; \quad y_J = \frac{0,5}{1 - c_0}.$$

N_J ist die Amplitudenschranke von Jackson bei Periodenlängen $l_p \geq 3$, wenn $|c_1'| < 2$ ist. Diese Schranke wird aber nur dann nicht überschritten, wenn auch der zweite wirksame Koeffizient c_1' im Bereich

$$|y| \leq N_J$$

konstant bleibt. Mit

$$c_1 = C + c, \quad C \in \{0, \pm 1, \pm 2\}, \quad |c| \leq 0,5$$

muß das gerundete Produkt

$$[c_1 \cdot y]_R = C \cdot y \quad \text{für } |y| \leq N_J$$

ergeben. Daraus folgt

$$|c| \cdot N_J < 0,5, \quad \text{oder} \\ -\frac{1}{2N_J} < c < \frac{1}{2N_J}.$$

Für $N_J = 1, 2, 3, \dots$ erhält man dann

$$1 - \frac{1}{2N_J} \leq c_0 < 1 - \frac{1}{2(N_J + 1)} \quad (2-23a)$$

$$C - \frac{1}{2N_J} < c_1 < C + \frac{1}{2N_J} \quad (2-23b)$$

als Bereiche, in denen N_J eine sichere Amplitudenschranke ist.

In Frage kommen hier wegen der Einschränkung $|c_1'| < 2$ nur $C = 0$ und $C = \pm 1$; das entspricht den Frequenzen $f_A/4$, $f_A/3$ und $f_A/6$. Damit ergeben sich aus (2-23) genau die für $l_p = 3, 4$ und 6 in Tabelle 2.2 angegebenen Gebietsgrenzen.

Zahlenbeispiel:

$N_J = 4$ ist sichere Amplitudenschranke für Grenzzyklen mit $l_p = 4$, die bei den Koeffizienten

$$\begin{aligned} 0,875 &\leq c_0 < 0,9 \\ -0,125 &< c_1 < 0,125 \end{aligned}, \quad C = 0$$

auftreten können (vergl. Bild 2.13).

$$2.5.1.2 \quad c_0' = 1; \quad |c_1'| = 2$$

Für reelle wirksame Pole mit Grenzzyklusperioden $l_p \leq 2$ muß bei $c_0' = 1$ zusätzlich $|c_1'| = 2$ sein. Bei ganzzahligem y ist

$$|c_1| \cdot |y| \pm \Delta_1 = |c_1'| \cdot |y| = 2|y|.$$

Mit $\Delta_1 \leq 0,5$ bei Rundung

$$\text{gilt } |c_1'| = 2 \text{ für } |y| \leq N_R = \left[\frac{y_R}{2} \right]; \quad y_R = \frac{0,5}{2 - |c_1|}.$$

Innerhalb des Bereichs $|y| \leq N_J$ stellt somit $N_R \leq N_J$ *) eine Amplitudenschranke für Grenzzyklen der Periode $l_p \leq 2$ dar. Der entsprechende Koeffizientenbereich wird angegeben durch die Beziehungen

$$1 - \frac{1}{2N_J} \leq c_0 < 1 - \frac{1}{2(N_J+1)} \quad (2-24a)$$

$$\text{und} \quad 2 - \frac{1}{2N_R} \leq |c_1| < 1 + c_0 \quad (2-24b)$$

Die mit (2-24) beschriebenen Gebiete wurden bei der experimentellen Ermittlung der größten Grenzzyklen nicht berücksichtigt, da im selben Koeffizientenbereich zusätzlich entweder Grenzzyklen mit $l_p \geq 3$ und $|y| > N_R$, oder Grenzzyklen mit $l_p \leq 2$ und $|y| > N_J$ (siehe Abschnitt 2.5.2.2) vorkommen.

*) Es ist immer $N_R \leq N_J$, da aus der Stabilitätsbedingung $|c_1| < 1 + c_0$ für das lineare System die Beziehung $0,5/(2 - |c_1|) < 0,5/(1 - c_0)$, also $y_R < y_J$ folgt.

2.5.2 Variable wirksame Koeffizienten

Nun sollen Systeme betrachtet werden, deren wirksame Koeffizienten nicht mehr konstant sind, sondern vom Signal y abhängen (Fall b). Zur Beschreibung dieses Zusammenhangs wird die folgende, gegenüber Abschnitt 2.5.1 verallgemeinerte Darstellung gewählt:

a) für c_0' gilt $[c_0|y]_R = c_0'|y|$,

$$\text{also } c_0' = \frac{[c_0|y]_R}{|y|} =: \frac{|y| - s}{|y|} \quad (2-25a)$$

Es ist $s = 0$ für $0 < |y| \leq N_J$ (siehe 2.5.1)

$$\text{und } s = 1, 2, 3, \dots \text{ für } \left[\frac{2s-1}{2(1-c_0)} \right] < |y| \leq \left[\frac{2s+1}{2(1-c_0)} \right] \quad (2-25b)$$

b) Wegen $c_1 = C + c$ mit $C \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, $|c| \leq 0,5$

$$\text{gilt } [c_1|y]_R = [C|y| + c|y|]_R = c_1'|y|;$$

$$\text{also wird } c_1' = \frac{[C|y| + c|y|]_R}{|y|} =: \frac{C|y| \pm r}{|y|} \quad (2-26a)$$

$$\text{Dabei ist } r = 0 \text{ für } 0 < |y| \leq \left[\frac{0,5}{|C - c_1|} \right] = \left[\frac{0,5}{|c|} \right]$$

$$\text{und } r = 1, 2, 3, \dots \text{ für } \left[\frac{2r-1}{2|c|} \right] < |y| \leq \left[\frac{2r+1}{2|c|} \right] \quad (2-26b)$$

Zahlenbeispiele :

zu a) bei $c_0 = 0,9$ ist

s	im Bereich
0	$0 < y \leq 5$
1	$5 < y \leq 15$
⋮	
5	$45 < y \leq 55$
⋮	

zu b) bei $c_1 = 1,8$ ist $C = 2$, $c = -0,2$, $c_1' = 2 - \frac{r}{|y|}$

r	im Bereich
0	$0 < y \leq 2$
1	$2 < y \leq 7$
2	$7 < y \leq 12$
⋮	

$$2.5.2.1 \quad |c_0'| \leq 1 \quad ; \quad |c_1'| < 1 + c_0'$$

Die obige Vorbetrachtung und das Zahlenbeispiel zeigen, daß sich

der wirksame Koeffizient c_1' bereits für Werte $|y| \leq N_J$ ändert, wenn c_1 nicht mehr in dem durch (2-23b) beschriebenen Bereich liegt. Aus (2-26a) folgen für c_1 die Bereiche

$$|c| - \frac{2r+1}{2|y|} < |c_1| < |c| - \frac{2r-1}{2|y|}$$

bzw.

$$|c| + \frac{2r+1}{2|y|} > |c_1| > |c| + \frac{2r-1}{2|y|} .$$

Wegen des nicht mehr konstanten c_1' kann dabei aber auch

$$|y| > N_J$$

werden. Das positive Vorzeichen in (2-26a) ist aber nur für $|c| \leq 1$ möglich. Dann ändert sich aber auch c_0' in Abhängigkeit von y und für $|y| > N_J$ gilt (2-25a) im Bereich

$$1 - \frac{2s+1}{2|y|} \leq c_0 < 1 - \frac{2s-1}{2|y|} .$$

Aus (2-25a) und (2-26a) folgt allgemein

$$|c_1'| = 1 + |c_0'| + |c| - 2 + \frac{s \pm r}{|y|} . \quad (2-27)$$

Für $|c| = 2$ gilt das negative Vorzeichen von r , so daß für

$$r > s \geq 1$$

das wirksame System auf Grund von $c_0 > 0$ mit

$$c_0' < 1 \text{ und } |c_1'| < 1 + c_0'$$

stabil wird, wenn $|y| \geq N_J+1$ ist. Das bedeutet lediglich, daß für diesen Wertebereich das System -zeitweise- stabil erscheint. Für den kleinsten Signalwert $|y| = N_J+1$, für den das System gerade noch stabil ist, ergibt sich $|c| = 2$, $s = 1$ und $r = 2$. Die wirksamen Koeffizienten

$$c_0' = \frac{|y|-1}{|y|} \text{ und } |c_1'| = \frac{2|y|-2}{|y|}$$

erhält man im Koeffizientenbereich

$$1 - \frac{1}{2N_J} \leq c_0 < 1 - \frac{1}{2(N_J+1)} \quad (2-28a)$$

$$\text{und} \quad |c_1| < 2 - \frac{3}{2(N_J+1)} \quad . \quad (2-28b)$$

Systeme mit Koeffizienten in diesem Bereich - sofern sie nicht in den Bereich nach (2-23) fallen - können Grenzzyklen mit Periodenlängen $l_p \geq 3$ erzeugen, die über N_J hinaus in den stabilen Signalbereich überschwingen. Als Amplitudenschranke läßt sich dann

$$|y| \leq \min \{ y_{SK} , y_{PH} \} \quad (2-29)$$

angeben. Die Zahl $y_{PH} = 1,5/(1-c_0)$ wird wegen (2-25a) und $s = 1$ sicher nicht überschritten und y_{SK} reicht nach den experimentellen Ergebnissen in 2.2.3 ebenfalls aus.

Zahlenbeispiel:

$$\begin{aligned} c_0 &= 0,9 \text{ führt zu } y_{PH} = 15 ; \\ \text{mit } c_1 &= -1,7 \text{ wird } y_{SK} = 22 \\ \text{und } |y| &\leq \min \{ 22 , 15 \} = 15 \end{aligned}$$

$$2.5.2.2 \quad |c_0'| \leq 1 \quad ; \quad |c_1'| = 1 + c_0'$$

Nach (2-27) ergibt sich für $|y| \geq N_J + 1$ mit $|C| = 2$ und $r = s \geq 1$, daß

$$|c_1'| = 1 + c_0'$$

wird und das wirksame System ein reelles Polpaar aufweist. In Systemen, die diese Bedingungen erfüllen, werden also Grenzzyklen mit einer Periodenlänge $l_p \leq 2$ auftreten. Der kleinste Grenzzyklus dieser Länge hat die Amplitude $|y| = N_J + 1$ und tritt auf bei $r = s = 1$ im Koeffizientenbereich

$$1 - \frac{1}{2N_J} \leq c_0 < 1 - \frac{1}{2(N_J+1)} \quad (2-30a)$$

$$\text{und} \quad 2 - \frac{3}{2(N_J+1)} \leq |c_1| < 2 - \frac{3}{2(N_J+2)} \quad (2-30b)$$

Damit sind die Gebietsgrenzen für $l_p \leq 2$ aus Tabelle 2.2 (mit $N = N_J + 1$) theoretisch nachgewiesen. Ein weiteres Anwachsen der Grenzzyklusamplituden (über $N_J + 1$ hinaus) bei $l_p \leq 2$ ist aber durchaus möglich, da weiter verringerte wirksame Koeffizienten c_0' und $|c_1'| = 1 + c_0'$ mit

$$r = s > 1$$

immer wieder auf bedingt stabile Systeme führen. Für den Maximalwert der Amplitude gilt aber stets die absolute Schranke nach Abschnitt 2.2.1

$$|y| \leq \frac{1}{1 + c_0 - |c_1|} \quad . \quad (2-31)$$

Da es nach (2-24) Zyklen mit $l_p \leq 2$ gibt, die N_J nicht überschreiten, sollen noch allgemein alle Gebiete im Koeffizientendreieck bestimmt werden, in denen $l_p \leq 2$ möglich ist. Dazu ist eine Fallunterscheidung nötig :

a) $|c| = 2$, d.h. $1,5 \leq |c_1|$

Nach (2-25a, 26a, 27) ergeben sich die Gebiete

$$1 - \frac{2 \cdot s + 1}{2 \cdot N} \leq c_0 < 1 - \frac{2 \cdot s - 1}{2 \cdot N} \quad (2-32a)$$

$$2 - \frac{2 \cdot r + 1}{2 \cdot N} \leq |c_1| < 2 - \frac{2 \cdot r - 1}{2 \cdot N} \quad (2-32b)$$

$$N = 1, 2, 3, \dots; s = r = 0, 1, \dots, \left\langle \frac{N-1}{2} \right\rangle^*) \quad (2-32c)$$

b) $|c| = 1$, d.h. $0,5 \leq |c_1| < 1,5$

Aus (2-25a, 26a) folgt

$$|c_1| = 1 + c_0' = 1 + \frac{s + r}{|y|} ; \quad c_0 > 0$$

$$|c_1| = 1 + c_0' = 1 - \frac{s - r}{|y|} ; \quad c_0 < 0 ,$$

also

$$|c_1| = 1 + c_0' \text{ für } r = \pm (|y| - s) .$$

*) $\langle x \rangle$ ist die kleinste ganze Zahl, die $\geq x$ ist

Die Gebiete sind

$$1 - \frac{2s+1}{2N} \leq c_0 < 1 - \frac{2s-1}{2N} \quad (2-33a)$$

$$1 - \frac{-2(N-s)+1}{2N} \leq |c_1| < 1 - \frac{-2(N-s)-1}{2N} \quad (2-33b)$$

$$N = 1, 2, 3, \dots ; \left\langle \frac{N+1}{2} \right\rangle \leq s \leq N + \left[\frac{N-1}{2} \right]^{**} \quad (2-33c)$$

c) $C = 0$; d.h. $|c_1| < 0,5$

In diesem Fall ist bei positivem c_0

$$|c_1'| < 1 \leq 1 + c_0'$$

Bei negativem c_0 erhält man aus (2-25a , 26a)

$$|c_1'| = 1 + c_0' + \frac{r-s}{|y|} ; \quad c_0 < 0 ,$$

also Grenzzyklen mit $l_p \leq 2$ bei $r = s$ in den Gebieten

$$-1 + \frac{2r+1}{2N} \geq c_0 > -1 + \frac{2r-1}{2N} \quad (2-34a)$$

$$\frac{2r+1}{2N} > |c_1| \geq \frac{2r-1}{2N} \quad (2-34b)$$

$$N = 1, 2, 3, \dots ; \quad r = 0, 1, \dots, \left\langle \frac{N-1}{2} \right\rangle \quad (2-34c)$$

Die Darstellung mit Hilfe der Fallunterscheidung ist etwas unübersichtlich. Man kann mit einem Vergleich aber leicht zeigen, daß alle Gebiete nach (2-32) bis (2-34) auch durch die folgenden Beziehungen beschrieben werden.

***) $[x]$ ist der ganzzahlige Anteil von x

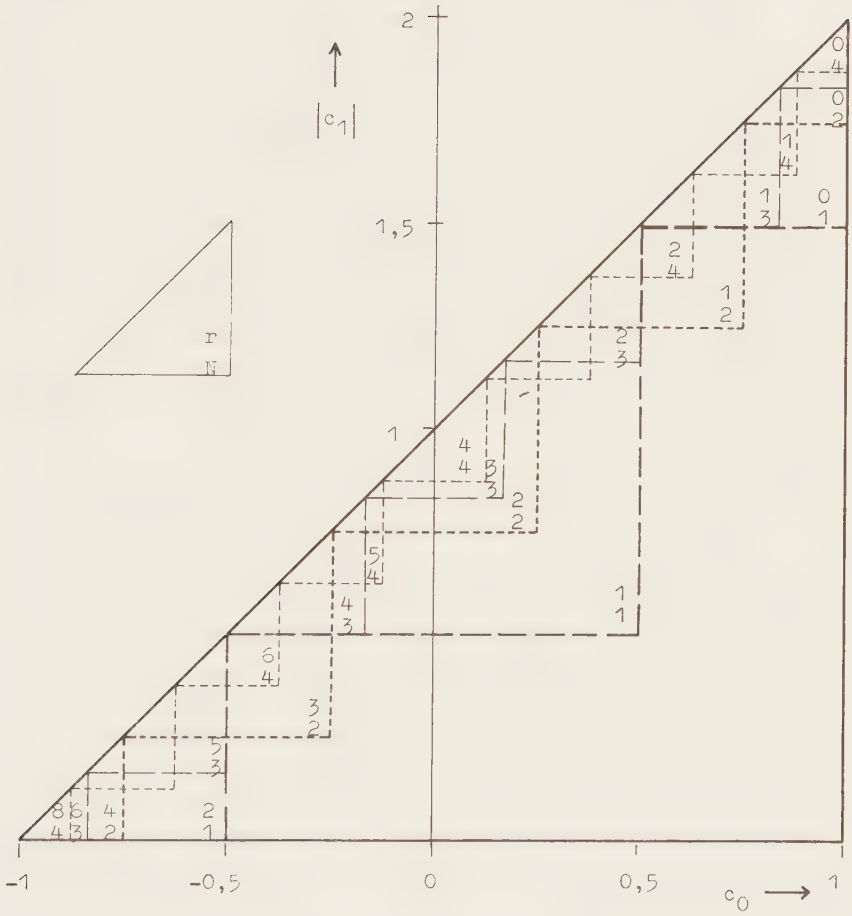


Bild 2.16 : Koeffizientenbereiche in denen bei Runden Grenzzyklen mit $l_p \leq 2$ und mit Amplituden $N \leq 4$ auftreten können .

$$1 - \frac{2r+1}{2N} \approx c_0 < 1 - \frac{2r-1}{2N} \quad (2-35a)$$

$$2 - \frac{2r+1}{2N} \approx |c_1| < 2 - \frac{2r-1}{2N} \quad (2-35b)$$

$$N = 1, 2, 3, \dots ; r = 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{4N+1}{2} \right] \quad (2-35c)$$

Zur Veranschaulichung wurden im Bild 2.16 für $N \leq 4$ die Gebiete nach (2-35) eingezeichnet, die im Stabilitätsdreieck für lineare Filter liegen. Aus der Übereinstimmung der linken Seiten der Beziehungen (2-30b) und (2-22) ist noch zu folgern, daß "rolling-pin" Grenzzyklen nur auftreten, wenn beim Überschreiten von N_J das wirksame System übergeht von $c_0' = 1$ auf $|c_1'| = 1 + c_0'$. Auf diesen und andere Sonderfälle wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

2.5.3 Sonderfälle sich ändernder wirksamer Koeffizienten

Bei fest vorgegebenen Koeffizienten c_0 und c_1 hängen die wirksamen Koeffizienten c_0' und c_1' ab vom Signal y und damit auch vom Anfangszustand. So ist z.B. $c_0' = 1$ für $|y| \leq N_J$ und $c_0' = (|y| - 1)/|y|$ im Bereich $N_J < |y| \leq 1,5/(1 - c_0)$. Dieser Übergang kommt vor im System mit Koeffizienten nach (2-30) und bedeutet ein Umspringen der wirksamen Polstellen des bedingt stabilen Systems vom Einheitskreis auf die reelle Achse. Im folgenden soll nun das Verhalten eines Systems 2. Grades, bei dem dieses Phänomen vorkommt, in Abhängigkeit vom Anfangszustand untersucht werden. Ein solches System liegt vor, wenn die Koeffizienten wegen der Bedingung $s=r=1$ für $N_J < |y| \leq \left[\frac{1,5}{2 - |c_1|} \right]$ die Ungleichung

$$0 < \frac{0,5}{2 - |c_1|} < \frac{0,5}{1 - c_0} < \frac{1,5}{2 - |c_1|} < \frac{1,5}{1 - c_0}$$

$$\text{bzw. } 0 < N_R < N_J < \left[\frac{1,5}{2 - |c_1|} \right] < \left[\frac{1,5}{1 - c_0} \right]$$

erfüllen. Es sind dann

$$c_0' = \begin{cases} 1 & \text{für } |y| \leq N_J \\ \frac{|y|-1}{|y|} & \text{für } N_J < |y| \end{cases} \leq \left[\frac{1,5}{1-c_0} \right]$$

$$c_1' = \begin{cases} 2 & \text{für } |y| \leq N_R \\ \frac{2|y|-1}{|y|} & \text{für } N_R < |y| \end{cases} \leq \left[\frac{1,5}{2-|c_1|} \right].$$

2.5.3.1 $y(0) = y(1) = 0$
Das System bleibt in Ruhe, d.h.
 $y(k) = 0$ für $k \geq 2$.

2.5.3.2 $y(0) = \pm y(1) = N$
Es wird o.B.d.A. $N > 0$ angenommen.

a) $N \leq N_R < N_J$ bedingt $c_0' = 1$, $|c_1'| = 2$
und führt auf $l_p \leq 2$, $|y| = N$
wie unter 2.5.1.2.

b) $N_R < N \leq N_J$ bedingt $c_0' = 1$; $|c_1'| = \frac{2N-1}{N}$
und führt auf einen Einschwingvorgang und einen maximalen Grenzzyklus mit
 $l_p \geq 3$ und $|y| \leq N_J$.

c) $N_J < N \leq \left[\frac{1,5}{2-|c_1|} \right]$ bedingt $c_0' = \frac{N-1}{N}$; $|c_1'| = \frac{2N-1}{N}$
und führt auf $l_p \leq 2$, $|y| = N$
wie unter 2.5.2.2.

d) $\left[\frac{1,5}{2-|c_1|} \right] < N \leq \left[\frac{1,5}{1-c_0} \right]$ bedingt $c_0' = \frac{N-1}{N}$
und $|c_1'| = \frac{2N-2}{N} = 1+c_0' - \frac{1}{N}$,
das System ist anfangs stabil, führt auf einen
Einschwingvorgang und dann auf einen der anderen Fälle.

- e) $N > \left[\frac{1,5}{1-c_0} \right]$;
 führt entweder auf ein bedingt stabiles System
 $c_0' = \frac{N-m}{N}$, $|c_1'| = \frac{2N-m}{N} = 1 + c_0'$
 mit $l_p \leq 2$ und
 $|y| \leq \frac{1}{1+c_0'-|c_1'|}$
 oder auf einen Einschwingvorgang und einen der anderen
 Fälle.

2.5.3.3 $y(1) = y(0) + \delta = N + \delta$
 Es wird o.B.d.A. $N > 0$; $\delta > 0$; $N, \delta \in \mathbb{N}$
 angenommen.

- a) $N, N + \delta \leq N_J$ bedingt $c_0' = 1$
 und $|c_1'| \leq 2$;
 das System kann einschwingen in Grenzzyklen mit
 mit $l_p \leq 2$ und $|y| \leq N_R$
 oder $l_p \geq 3$ und $|y| \leq N_J$
 oder, wenn während des Einschwingvorganges
 N_J überschritten und $|c_1'| = 1 + c_0'$ wird ,
 in Grenzzyklen mit

$$l_p \leq 2 \text{ und } |y| < \frac{1,5}{2-|c_1'|} .$$

Wenn nach Überschreiten von N_J immer noch $y(k+1) > y(k)$ ist,
 tritt der nächste zu besprechende Fall b) auf. Nach den
 Ergebnissen aus Abschnitt 2.4 kann dies nur für $\delta \geq 3$
 passieren (δ entspricht hier dem L aus 2.4) .

- b) $N_J < N$, $N + \delta < \left[\frac{1,5}{2-|c_1'|} \right]$ bedingt anfangs

$$c_0' = \frac{N-1}{N} \text{ und } |c_1'| = \frac{2(N+\delta)-1}{N+\delta}$$

$$\begin{aligned} \text{Es wird } y(2) &= |c_1'| \cdot y(1) - c_0' \cdot y(0) \\ &= 2(N+\delta) - 1 - N + 1 = N + 2\delta \end{aligned}$$

Mit jedem Schritt erhöht sich y um δ ,

$$\text{d.h. } y(k+1) = y(k) + \delta ,$$

aber nur solange bis

$$y(k_R + 1) > \frac{1,5}{2-|c_1'|}$$

wird und im Bereich

$$\left[\frac{1,5}{2-|c_1|} \right] + \delta \geq y(k_R + 1) \geq \left[\frac{1,5}{2-|c_1|} \right] + 1$$

liegt. Dann verringert sich $|c_1'|$ auf

$$|c_1'| = \frac{2|y| - 2}{|y|}$$

und es folgt

$$y(k_R + 2) \leq y(k_R + 1) + \delta - 1$$

u.s.w. bis $y(k_R + s) \leq y(k_R + s - 1) + \delta - s + 1$.

Das wirksame System ist nun stabil und schwingt nur bis zum Scheitelpunkt

$$y_s = y(k_R + s) = y(k_R + \delta + 1) .$$

Dabei liegt wegen

$$\sum_{s=2}^{\delta+1} (\delta - s + 1) = \frac{\delta(\delta-1)}{2}$$

y_s im Bereich

$$\left[\frac{1,5}{2-|c_1|} \right] + \delta + \frac{\delta(\delta-1)}{2} \geq y_s \geq \left[\frac{1,5}{2-|c_1|} \right] + 1 + \frac{\delta(\delta-1)}{2} .$$

Im einfachsten Fall mit

$$\delta = 1 \text{ ergibt sich } y_s = \left[\frac{1,5}{2-|c_1|} \right] + 1 .$$

Für die Koeffizienten, bei denen ein solches Verhalten auftreten kann, erhält man die Beziehungen

$$1 - \frac{1}{2N_J} \leq c_0 < 1 - \frac{1}{2(N_J+1)} \quad (2-32a)$$

$$\text{und } 2 - \frac{3}{2(y_s-1)} \leq |c_1| < 2 - \frac{3}{2y_s} , \quad (2-32b)$$

die wegen der identischen Maximalamplituden $y_s = N_i$ mit den Koeffizientengebieten (2-17) für "rolling-pin" Grenzzyklen übereinstimmen.

Eine Verschärfung der linken Seite von (2 - 32b) ergibt die wegen

$$s = r = 1 \text{ im Bereich } N_J < |y| \leq \left[\frac{1,5}{2 - |c_1|} \right]$$

erforderliche Bedingung

$$\frac{0,5}{1 - c_0} < \frac{1,5}{2 - |c_1|} \quad (\text{siehe Seite 42}).$$

Aus ihr folgt mit

$$2 - 3(1 - c_0) < |c_1|$$

eine Eingrenzung des Bereichs für "rolling - pins", die mit (2 - 22a) bereits empirisch gefunden worden war.

Für die Entstehung dieser Sonderform von Grenzyklen kann somit die folgende Plausibilitätserklärung gegeben werden: Ein System 2.Grades, das sich irgendwann in einem Zustand nach 2.5.3.3.a) befindet, kann für $\delta_1 \geq 3$ über N_J hinaus schwingen in einen Zustand nach 2.5.3.3.b) mit $\delta_2 \geq 1$. Dann bewirkt der Übergang von $c_0' = 1$, $|c_1'| \leq 2$ auf $c_0' < 1$, $|c_1'| = 1 + c_0'$ einen linearen Anstieg bis $|c_1'| < 1 + c_0'$ wird ($|y| > \left[1,5 / (2 - |c_1|) \right]$). Das dann stabile wirksame System kehrt nach Erreichen des Scheitelpunkts y_s zuerst zurück in den Bereich mit $|c_1'| = 1 + c_0'$ (δ_2 ändert dabei sein Vorzeichen) und dann in den Bereich mit $c_0' = 1$ (und $-\delta_1$). Der beschriebene Vorgang kann nun mit umkehrtem Signalvorzeichen durchlaufen werden, so daß sich der "rolling - pin" Grenzyklus schließt. Innerhalb des mit (2-32) bzw. (2-17) spezifizierten Koeffizientenbereichs ist dieser Vorgang aber auch nur dann möglich, wenn die Parameter nach (2-18), (2-19) und (2-21) gewählt wurden und $|c_1|$ im engeren Bereich (2-22) liegt.

$$c) \left[\frac{1,5}{2-|c_1|} \right] < N + \delta < \left[\frac{1,5}{1-c_0} \right]$$

beschreibt ein anfangs stabiles System, das auf einen Einschwingvorgang und dann auf einen der anderen Fälle führt.

$$d) N \leq \left[\frac{1,5}{1-c_0} \right] ; N + \delta > \left[\frac{1,5}{1-c_0} \right]$$

Bereits nach einem Schritt ist $c_0' = \frac{|y|-2}{|y|}$ und wegen $|c_1'| = 1 + c_0'$ das System bedingt stabil.

Es entsteht entweder ein Grenzzzyklus mit

$$l_p \leq 2 \quad \text{und} \quad |y| = \left[\frac{1,5}{1-c_0} \right] + 1$$

(bei $\delta = 1$ und $N = \left[1,5/(1-c_0) \right]$) oder ein monotoner Anstieg mit der Stufenhöhe δ (bei $\delta > 1$ und $N = \left[1,5/(1-c_0) \right]$) oder bei $\delta \geq 1$ und $N > \left[1,5/(1-c_0) \right]$, solange bis

$$|y| > \left[\frac{2,5}{2-|c_1|} \right]$$

wird. Dann ist das wirksame System stabil und geht mit einem zuerst abklingenden Einschwingvorgang über in einen der anderen Fälle mit $|y| \leq \left[1,5/(1-c_0) \right]$.

$$e) N, N + \delta > \left[\frac{1,5}{1-c_0} \right]$$

führt entweder auf ein bedingt stabiles System mit

$$l_p \leq 2 \quad \text{und} \quad |y| < \frac{1}{1+c_0-|c_1|}$$

oder auf einen Einschwingvorgang und einen der anderen Fälle.

2.6 Verfahren zur praktischen Anwendung der Ergebnisse aus 2.1 bis 2.5

Um eine sinnvolle Nutzung aller Ergebnisse aus 2.1 bis 2.5 zu gewährleisten, ist eine übersichtliche Zusammenstellung notwendig. Die Forderung nach einfacher praktischer Anwendung bei vorgegeben Koeffizienten hat zur Entwicklung eines Ablaufschemas für eine Grenzzyklenabschätzung y_E geführt. In dieses Schema wurden zur größtmöglichen Genauigkeit alle verfügbaren Informationen eingearbeitet (siehe Bild 2.17).

Für Anwendungsfälle, in denen es mehr auf einen qualitativen und schnellen Überblick ankommt, wurde mit y_C eine "kombinierte Amplitudenschranke" zusammengesetzt aus den bekannten Abschätzungsformeln. Die Bereiche der Gültigkeit der jeweiligen Formel sind dabei näherungsweise mit kontinuierlichen Kurven sowohl im Dreieck stabiler Koeffizienten (Bild 2.18) als auch in der z-Ebene (Bild 2.19) angegeben. Die dominierende Frequenz bzw. Periodenlänge ist aus y_C nicht ersichtlich; sie kann mit den Angaben in Abschnitt 2.3 (speziell aus den Bildern 2.11 bis 2.13) ermittelt werden.

2.6.1 Ablaufschema für die Grenzzyklenabschätzung y_E (geeignet für Rechnerauswertung)

Das im Bild 2.17 angegebene Schema ermöglicht bei vorgegebenen Koeffizienten c_0 und c_1 die Ermittlung sowohl eines Schätzwerts für die dominierende Frequenz als auch einer Schranke für die Amplitude des größten möglichen Grenzzyklus. Es bedeuten

$$f_p = f_A \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \arccos \frac{-c_1}{2\sqrt{c_0}}$$

$\frac{1_p}{m}$ = Periode der dominierenden Frequenz, abzulesen
aus Bild 2.13

$$y_{PH} = \frac{1,5}{1-c_0} ; y_{SK} = \frac{1}{(1-c_0)\sqrt{1-c_1^2/(4c_0)}}$$

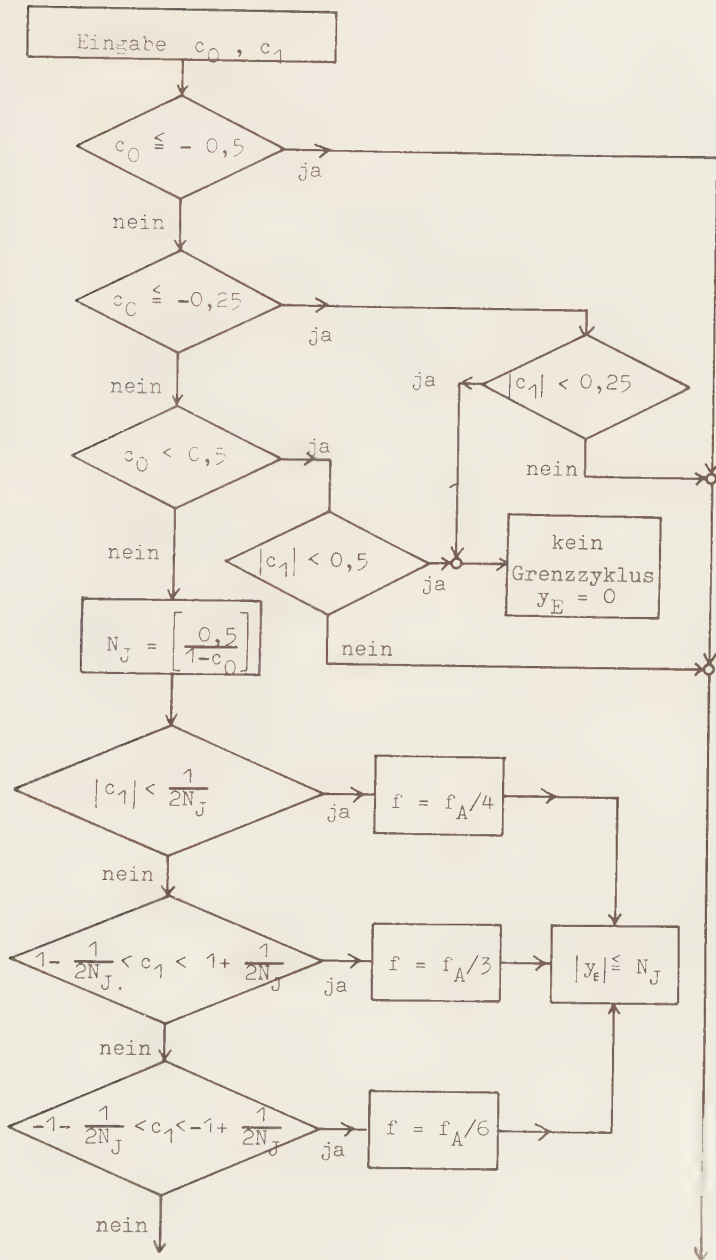


Bild 2.17 : Ablaufschema zur Ermittlung von y_E , 1. Teil

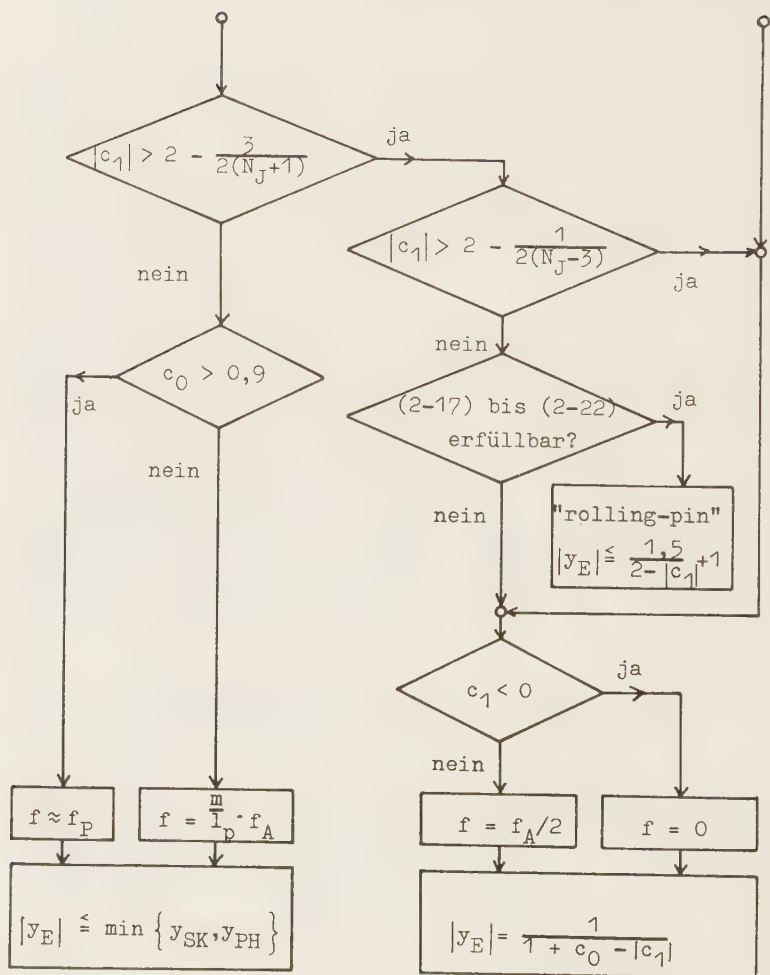


Bild 2.17 : Ablaufschema zur Ermittlung von y_E , 2. Teil

2.6.2 Einführung einer kombinierten Schranke y_G .

In der Tabelle 2.4 sind die für y_G verwendeten Amplitudenschranken und die entsprechenden Anwendungsbereiche zusammengestellt. Es wird aber nochmals darauf hingewiesen, daß diese Gebiete die exakten Regionen nur näherungsweise zum Zwecke einer einfachen Abgrenzung beschreiben. Sie sind so gewählt, daß y_G eine sichere Abschätzung bleibt, aber in Teilbereichen dadurch etwas zu pessimistisch ist. In den Bildern 2.18 und 2.19 sind die Begrenzungen im zulässigen Koeffizientendreieck bzw. in der komplexen Polebene eingezeichnet.

Die kombinierte Schranke y_G eignet sich besonders zur schnellen Auswertung per Hand.

Schranke	Anwendungsbereich
$\frac{0,5}{1-c_0}$	$c_0 < 0,75 \quad , \quad l_p \geq 3$
$\frac{1,5}{1-c_0}$	$c_0 \geq 0,75 \quad ; \quad \frac{2}{3} \sqrt{5c_0} \leq c_1 < \frac{1}{3} + \frac{5}{3} c_0$
$\frac{1}{(1-c_0) \sqrt{1-\frac{c_1}{4c_0}}}$	$c_0 \geq 0,75 \quad ; \quad c_1 < \frac{2}{3} \sqrt{5c_0}$
$\frac{1}{1+c_0- c_1 }$	$\left\{ \begin{array}{l} c_0 < 0,75 \quad ; \quad l_p \leq 2 \\ c_0 \geq 0,75 \quad ; \quad c_1 \geq \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \cdot c_0 \end{array} \right.$

Tabelle 2.4 : Angaben zur kombinierten Amplitudenschranke y_G

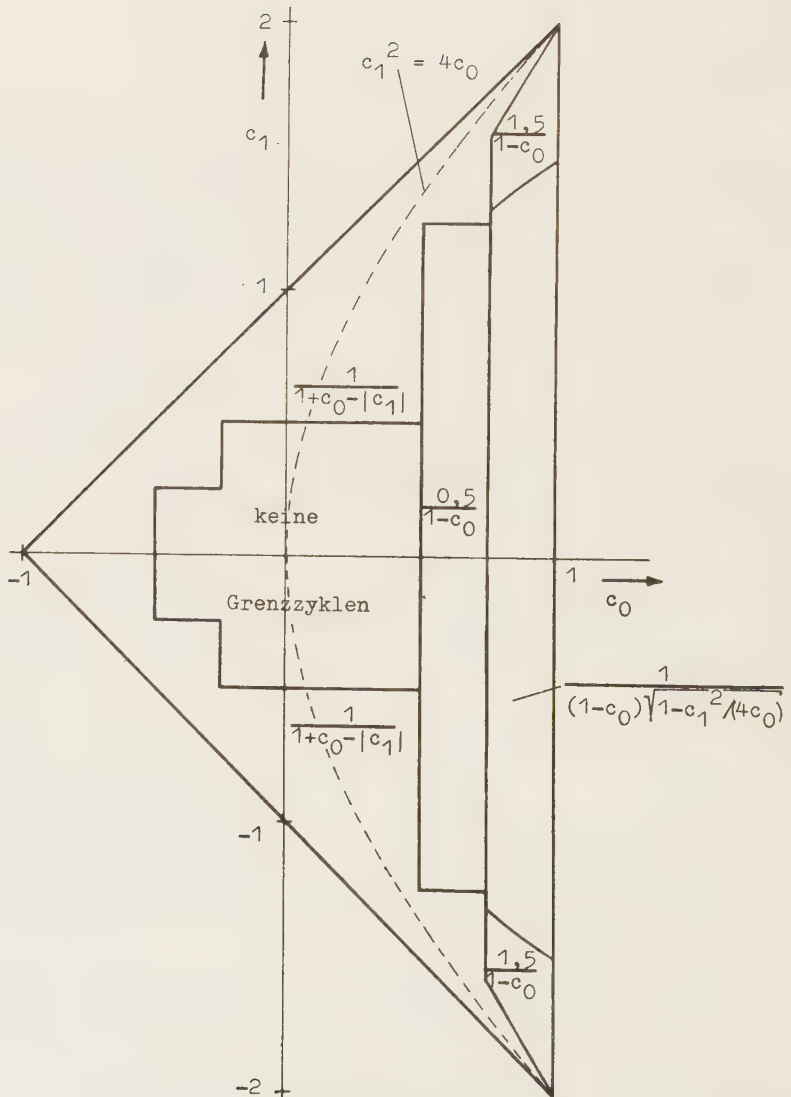


Bild 2.18 : Bereiche der kombinierten Schranke y_C im Koeffizientendreieck .

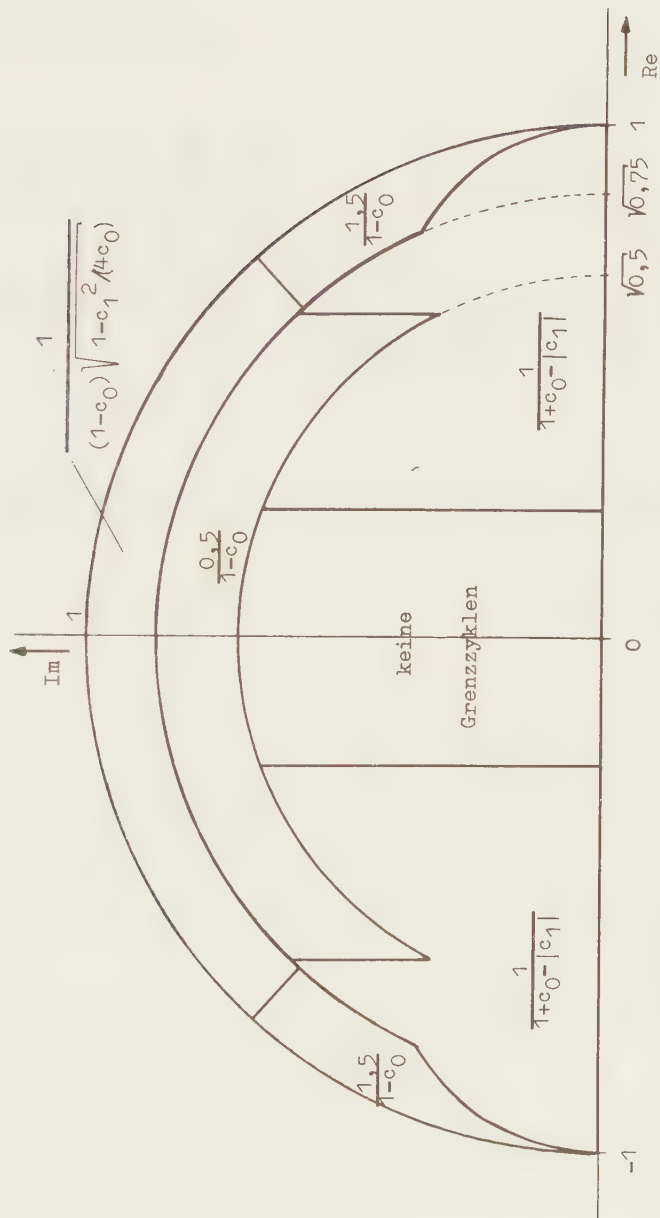


Bild 2.19 : Bereiche der kombinierten Schranke y_G in der komplexen Polebene .

3. Grenzzyklen in höhergradigen digitalen Filtern bei Runden

3.1 Vorbemerkung

Aus verschiedenen Gründen (u.a. wegen der Empfindlichkeit der Eigenwerte, siehe /1/) , werden höhergradige rekursive digitale Filter als Parallelschaltung bzw. als Kaskade von Blöcken 2. Grades realisiert. Die Abschätzung der Grenzzykusamplitude bei der Parallelförm ohne Erregung ist relativ einfach. Jedes Teilfilter ist ohne Eingangssignal, so daß - bei Abschätzung der möglichen Grenzzyklen durch

$$|y| \leq y_{\lambda}$$

in den Blöcken mit den Nummern $\lambda = 1, 2, \dots, l$ - der resultierende Gesamtgrenzzyklus in der Parallelförm der Schranke

$$|y_P| = \sum_{\lambda=1}^l y_{\lambda} \quad (3-1)$$

unterliegt.

Bei einem Kaskadenfilter ohne Eingangssignal ist nur der 1. Block sicher nicht erregt. Schon auf den 2. Block wirkt der eventuell im ersten Teilfilter entstehende Grenzzyklus, u.s.w. Die theoretische Analyse dieses Verhaltens ist äußerst schwierig, weil die im jeweiligen Block vorkommenden Grenzzyklen nicht nur vom Anfangszustand und den Koeffizienten dieses Blocks abhängen, sondern auch von den nichtlinearen Effekten im davor liegenden Filterteil.

Experimentell wurde in /25/ gezeigt, daß in einem Kaskadenfilter die mittlere Leistung des größten Grenzzyklus bis nahezu 20 dB höher sein kann, als die mittlere Leistung des Rundungsrauschens beim Betrieb mit Eingangssignal. Es ist demzufolge nicht ausreichend, die notwendige Verlängerung der Rechenwortlänge im Innern des Filters allein nach der Größe des Quantisierungsrauschens zu bemessen.

Legt man die in /1/ eingeführte Definition der erforderlichen Erhöhung Δ_w der inneren Wortlänge zu Grunde, so benötigt man im Beispiel I_1 von /25/ wegen des Quantisierungsrauschens ein

$$\Delta_w = \langle 3, 13 \rangle = 4 \text{ bit.}$$

Eine Unterdrückung der Grenzzykusamplitude mit Abschneiden hinter dem Block (erzeugt zusätzlichen Fehler am Ausgang) würde 5 bit und mit Runden sogar 6 bit zusätzlich erfordern. Wie ebenfalls in /25/ und auch in /26/ experimentell mit Beispielen belegt wurde, führt jedoch die Minimierung der mittleren Leistung des Quantisierungsrauschens (z.B. nach /27/) zu Filterkonfigurationen, die auch günstig im Sinne minimaler Grenzzyklen sind. Es wurde zwar in /25/ eine Anordnung I_5 des Filters I gefunden, die kleinere Grenzzykusamplituden hat. Zu deren Unterdrückung sind aber ebenso wie mit I_1 5 bzw. 6 bit nötig. Die Quantisierungsrauschleistung ist bei dieser Reihenfolge der Blöcke aber etwa verdreifacht, so daß

$$\Delta_w = \langle 3, 86 \rangle = 4 \text{ bit}$$

gerade noch ausreicht. Es ist im allgemeinen also nicht zu erwarten, daß man durch eine andere als die rauschoptimale Anordnung eine wesentliche Verringerung des Aufwands für die innere Wortlänge erreichen kann.

In jedem Fall aber ist es wichtig, eine Schranke bzw. einen Schätzwert für Grenzzyklen zu haben, um die Größe des zusätzlichen Aufwands ermitteln zu können. Die folgenden Untersuchungen befassen sich mit solchen Abschätzungen.

3.2 Absolute Schranken für die Amplitude von Grenzzyklen in Kaskadenfiltern.

Der Vorteil einer absoluten Schranke liegt in der Sicherheit, daß sie von keinem Grenzzyklus überschritten wird. Vermutlich aus diesem Grund und auch weil "worst-case" - Betrachtungen verhältnismäßig wenig Kenntnis der tatsächlichen Vorgänge erfordern, wurden solche Schranken zuerst entwickelt.

Die allgemein bekannte Beziehung (2-5b) wurde in /28/ ausgenutzt zur Herleitung einer absoluten Schranke für Grenzzyklen in einem erregten Block 2. Grades. Unter Berücksichtigung einer Struktur in der 1. kanonischen Form mit 3 Rundungsstellen (um später mit Meßwerten vergleichen zu können) lautet diese Abschätzung

$$|y| \leq (|u|_{\max} + 1,5) \sum_{k=0}^{\infty} |h_0(k)| \quad (3-2)$$

Dabei rührt die Konstante 1,5 von den 3 Rundungsstellen her und es ist $|u(k)| \leq |u|_{\max}$ angenommen. Die Folge $\{h_0(k)\}$ bezeichnet die Impulsantwort des Blocks 2. Grades.

Mit der Abkürzung $S_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} |h_{0\lambda}(k)|$ ist z.B. bei einer Kaskade von 3 Blöcken

$$|y_3| \leq \left\{ \left[(|u_1|_{\max} + 1,5) S_1 + 1,5 \right] S_2 + 1,5 \right\} S_3$$

Ohne Eingangssignal ($u_1 \equiv 0$) sind im ersten Block bei der 1. kan. Form nur 2 Rundungsstellen wirksam, so daß

$$|y_3| \leq S_1 S_2 S_3 + 1,5 (S_2 S_3 + S_3)$$

wird. Ähnlich wie in /17/ kann dies erweitert werden auf 1 Blöcke 2. Grades. Man erhält

$$|y| \leq \frac{1}{\prod_{\lambda=1} S_\lambda} + 1,5 \sum_{\lambda=2} \frac{1}{\prod_{s=\lambda} S_s} \quad (3-3)$$

Da (3-3) alle Fehlerquellen im Filter berücksichtigt, ist diese Abschätzung auch für rauschartige Quantisierungsfehler brauchbar /17/.

Unter der Annahme, daß für die Blöcke mit den Nummern $\lambda = 2, \dots, 1$ jeweils gilt

$$|u_\lambda|_{\max} \gg 1,5 ; \quad \lambda = 2(1)1 \quad ,$$

vereinfacht sich (3-2) zu

$$|y| \leq |u_\lambda|_{\max} \cdot S_\lambda \quad .$$

An Stelle von (3-3) erhält man dann

$$y_{BG} \leq \frac{1}{\pi} S_\lambda \quad (3-4)$$

als Näherungswert für die absolute Schranke (3-3) .

Ein anderer Vorschlag /29/ benützt eine Rekursionsformel zur Berechnung einer sicheren Abschätzung:

$$\text{Mit} \quad y_0 = 0$$

$$\text{ist} \quad y_\lambda = (y_{\lambda-1} \cdot \sum_{v=0}^2 |b_{v\lambda}| + 1,5) y_{YP,\lambda} \quad (3-5)$$

$$\text{für} \quad \lambda = 1, 2, \dots, 1 \quad .$$

Die absolute Schranke für die Grenzyklen am Filterausgang erhält man für $\lambda = 1$, also

$$y_{MF} = y_1 \quad .$$

Bei der Rekursionsformel (3-5) wurde bereits die Struktur von Blöcken 2.Grades in der 1.kanonischen Form mit 3 Rundungsstellen berücksichtigt. Der Faktor $y_{YP,\lambda}$ ist nach (2-11) für den jeweiligen Block λ zu bestimmen.

Zu den Formeln (3-4) und (3-5) ist zu bemerken, daß die für die Teilblöcke 2.Grades eingesetzten Schranken nach den Ergebnissen des 2. Kapitels recht pessimistisch sind. Das gilt insbesondere für Pollagen nahe bei $z = \pm 1$. Zur Ermittlung der Schranken für die Kaskade werden diese pessimistischen Werte im wesentlichen miteinander multipliziert, so daß das Ergebnis weit über den tatsäclich vorkommenden Grenzyklusamplituden liegen muß. Ein Zahlenvergleich mit gemessenen Werten wird im Abschnitt 3.5 durchgeführt.

3.3 Blöcke 2. Grades mit konstantem oder periodischem Eingangssignal

Bei der systematischen Untersuchung einer Reihe von Blöcken 2. Grades sowohl mit konstanten als auch mit periodischen Eingangssignalen wurden die folgenden Erscheinungen beobachtet:

a) eine konstante Erregung führt zu Grenzzyklen um eine Konstante, die der Gleichantwort eines linearen Systems entspricht. Bei Blöcken, die bei verschwindendem Eingangssignal u.a. auch einen Grenzzyklus der Periode $l_p = 1$ erzeugen können, kommt es vor, daß bei konstanter Erregung der Mittelwert von Grenzzyklen (auch bei $l_p \geq 3$) bis etwa um den Wert der möglichen eigenen Gleichablage von der Gleichantwort des linearen Systems verschoben ist. In diesen Fällen scheint eine additive Überlagerung beider Grenzzyklusarten zu erfolgen. Die Amplituden von Schwingungen mit $l_p \geq 3$ unterliegen aber den Schranken für Grenzzyklen bei fehlendem Eingangssignal.

b) Bei periodischer Erregung im Maximum des Betrags der Übertragungsfunktion, bzw. in der Nähe der Polfrequenz konnte die von Hess /6/ befürchtete übermäßige Verstärkung nicht gefunden werden. Statt dessen wurde festgestellt, daß bei großem Eingangssignal das Filter linear arbeitet. Dieses Verhalten bleibt bei Verkleinerung der Erregung ungefähr so lange erhalten, bis das im linearen Fall zu erwartende Ausgangssignal etwa 3 bis 4 mal ($\approx 10 \dots 12$ dB) größer ist als der größte Grenzzyklus. Bei weiterer Verkleinerung des Eingangssignals bleibt am Ausgang ein Gemisch aus Erregung und Grenzzyklus oder ein Signal, das zwischen verschiedenen Grenzzyklen umspringt (jeweils bei Spitzenwerten am Eingang). Es kann aber auch ein Grenzzyklus mit etwas größerer Amplitude als ohne Erregung auftreten, oder ein Grenzzyklus mit einer Periode, die ein Vielfaches der Periode des Eingangssignals ist. Die Amplituden des Ausgangssignals können abgeschätzt werden mit der Summe aus einer der Amplitudenschranken für den größten Grenzzyklus ohne Erregung (z.B. y_E oder y_C) und der Amplitude der linearen Systemantwort y_L

$$|y| \leq |y_{E,C}| + |y_L| \quad .$$

c) Eine periodische Erregung außerhalb des Maximums der Übertragungsfunktion führt auf ähnliche Verhältnisse. Die lineare Abhängigkeit des Ausgangssignals (mit der Frequenz der Erregung) von der Amplitude der Erregung reicht dabei oft herab bis zur Amplitude des größten Grenzzyklus mit $l_p \geq 3$ bei fehlendem Eingangssignal.

Neben der erregenden Frequenz tritt aber im Ausgangssignal im allgemeinen ein relativ breites Spektrum diskreter Linien auf, deren Höhe vom Verlauf der Übertragungsfunktion des Blocks beeinflusst ist. Die größte Linie befindet sich nahe der Maximalstelle von $|H(\Omega)|$; sie ist umso mehr ausgeprägt, je größer die Güte der Polstellen ist. Ihre Frequenz liegt somit in der Nähe der Polfrequenz; ihre Amplitude unterliegt den Grenzzyklusschranken. Bemerkenswerterweise gelten diese Aussagen auch für Blöcke, deren größter Grenzzyklus die Periode $l_p = 1$ hat. D.h. daß bei nullsymmetrischer periodischer Erregung die Entstehung von Gleichablagen ziemlich sicher verhindert wird.

Als Beispiele für die unter a) bis c) gemachten Aussagen wurde das Verhalten von 2 verschiedenen Blöcken 2. Grades dokumentiert. Die Frequenzgänge wurden mit dem in /18/ beschriebenen Filtermeßplatz ermittelt. Die Spektren wurden auch rein digital (zur Vermeidung von $\frac{\sin(x)}{x}$ - Verzerrungen) gemessen. Der Meßaufbau mit den Geräten aus /18/ ist im Anhang A1 angegeben.

Der Block 2. Grades im Beispiel A stammt aus dem in /25/ und A2 näher dokumentierten Tiefpaß 8. Grades. Er hat die Nennerkoeffizienten

$$\begin{aligned} c_0 &= 0,956238 \\ \text{und } c_1 &= -0,960571 . \end{aligned}$$

Seine Übertragungsfunktion (skaliert auf $\max |H(\Omega)| \approx 1$) und das Amplitudenspektrum des größten Grenzzyklus sind in Bild 3.1 zu sehen. Der Grenzzyklus hat die Amplitude $N_j = 11$ ($\hat{=} -69\text{dB}$) und die Periode $l_p = 6$.

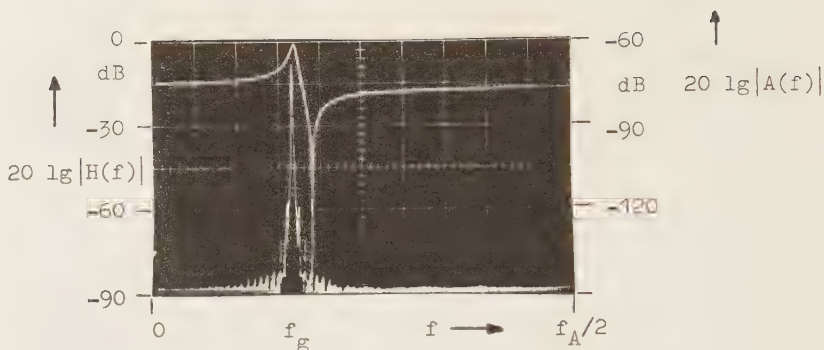


Bild 3.1 : Betragsfrequenzgang $|H(f)|$ und Amplitudenspektrum $|A(f)|$ des größten Grenzzyklus beim Beispiel A (0 dB entspricht Vollaussteuerung).

Eine konstante Erregung führt zu verschiedenen Schwingungen um die Gleichantwort. Die Amplituden dieser Oszillationen sind $\leq N_J$. Meistens tritt die Periode 6 auf; es kommen aber auch längere Perioden mit mehreren Umläufen vor

$$\left(\text{z.B. } \frac{1}{m} = \frac{64}{11} \approx 5,82 \text{ und } \frac{1}{m} = \frac{23}{4} = 5,75 \right),$$

die aber alle eng beim Maximum der Übertragungsfunktion liegen.

Als Beispiel für ein breitbandiges aber periodisches Eingangssignal wurde ein Impulskamm mit Impulsen der Höhe $(1-Q) \cdot 2^{-T}$ im Abstand $n \cdot T$ gewählt. Das zugehörige Spektrum ist wieder ein Impulskamm. Die einzelnen Spektrallinien im Abstand f_A/n haben in logarithmischer Darstellung die Höhe $20 \lg \left(\frac{2}{n} (1-Q) 2^{-T} \right)$ in dB. Für $n = 36$ sind in der Tabelle 3.1 die Meßwerte für die Amplitude $A(f_g)$ der größten Spektrallinie ($f_g = f_A/6$) im Bereich

$r = 0, 1, \dots, 8$ angegeben. Zum Vergleich enthält die Tabelle auch die für ein lineares System errechnete Ausgangsamplitude. Aus den Werten ist das unter b) und c) beschriebene Verhalten zu ersehen. Im Bild 3.2 ist das Spektrum des Ausgangssignals beim kleinsten angelegten Eingangsimpulskamm mit $r = 8$ zu sehen. Die kleineren Spektrallinien

r	Amplitude $A(f_g)$ in dB		Bemerkung
	lin. System	gemessene Werte	
0	-25,64	-25,6	} praktisch lineares Verhalten des realen Systems
1	-31,66	-31,7	
2	-37,68	-37,7	
3	-43,70	-43,7	
4	-49,72	-49,7	
5	-55,74	-55,7	} ----- Grenzyklus stört
6	-61,76	-59,7	
7	-67,78	-66,4	
8	-73,80	-67,9	

Tabelle 3.1: Verhalten des Blocks 2.Grades aus Beispiel A bei Verringerung des Eingangssignals (Impulskamm).

entsprechen in ihrer Intensität einem annähernd linearen Verhalten des Blocks 2.Grades, während die größte Linie infolge eines Grenzyklus den Sollwert um etwa 6 dB übersteigt.

Als weiteres periodisches Signal diente für den Block A eine dreiecksförmige Folge mit der Periode 6. Zur Untersuchung des Verhaltens des Ausgangssignals wurde das Eingangssignal mit 2^{-r} , $r = 0, 1, \dots, 9$ multipliziert. Die Meßwerte zusammen mit den für lineares Verhalten errechneten Werten bei der Grundwelle $f_g = f_A/6$ sind in der Tabelle 3.2 zu finden. Für $r = 7$ entstehen bei verschiedenen Anfangszuständen auch unterschiedliche Grenzyklen, so daß mehrere Meßwerte möglich sind.

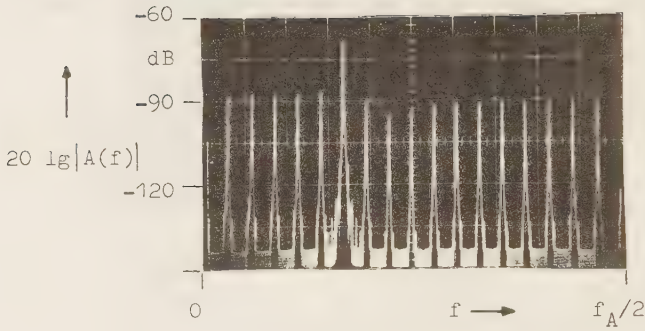


Bild 3.2 : Spektrum des Ausgangssignals im Beispiel A
bei einem Eingangsimpulskamm der Höhe 2^{-8} .

r	Amplitude $A(f_g)$ in dB		Bemerkung
	lineares System	gemessene Werte	
0	-22,39	-22,4	} praktisch lineares Verhalten des realen Systems
1	-28,41	-28,4	
2	-34,43	-34,5	
3	-40,45	-40,4	
4	-46,47	-46,7	
5	-52,49	-52,8	
6	-58,51	-58,4	} ----- Grenzzyklen im System
7	-64,53	-63,3	
		-68,8	
		-61,9	
8	-70,55	-59,1	
		-62,8	
9	-76,57	-65,5 (1)	}
		-62,4 (2)	

Tabelle 3.2 : Verhalten des Blocks 2.Grades aus Beispiel A
bei Verringerung des Eingangssignals (Dreieck).

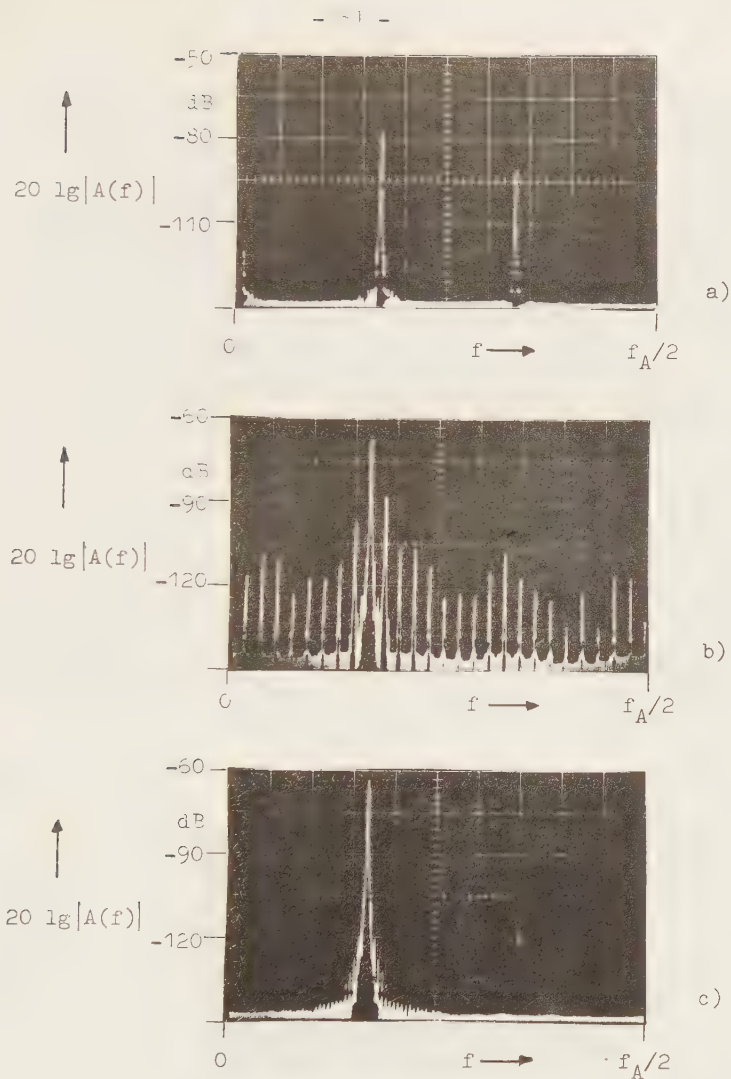


Bild 3.3 : Spektren der Signale bei dreieckförmiger Erregung und $r=9$

a) Eingangssignal

b) Grenzzzyklus ① aus Tabelle 3.2 mit $l_p = 54$

c) Grenzzzyklus ② aus Tabelle 3.2 mit $l_p = 6$

Für $r = 9$ wurden in Bild 3.3 sowohl das Spektrum des Eingangssignals, als auch die Spektren zweier möglicher Grenzzyklen registriert. Der eine Grenzzyklus hat mit $l_p = 54$ die 9 - fache Periode der Erregung, der andere (größte gefundene) hat mit $A = 24$ mehr als die doppelte Amplitude wie ohne Signal. Diese Amplitude wird von den Abschätzungen y_{SK} bzw. y_C (siehe Kap. 2.6), die beide 26 ergeben, aber immer noch abgedeckt.

Als Beispiel B wurde der vorletzte Block aus einem Bandpaß 16. Grades /31,21/ ausgewählt. Nähere Angaben über dieses Filter sind im Anhang A2 zu finden. Aus den Koeffizienten

$$c_0 = 0,993225$$

und $c_1 = -1,984985$

ist zu ersehen, daß die Pole sehr nahe an der Stabilitätsgrenze bei $z = +1$ liegen. Die skalierte Übertragungsfunktion ist zusammen mit dem Amplitudenspektrum des zweitgrößten ohne Eingangssignal vorkommenden Grenzzykus im Bild 3.4 enthalten. Der größte Grenzzyklus hat die Periode $l_p = 1$, er

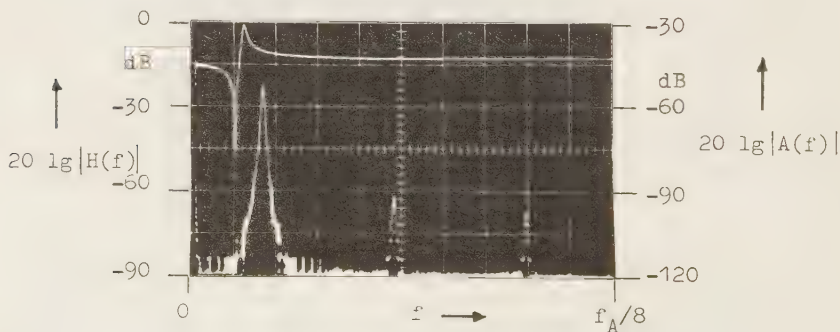


Bild 3.4 : Betragsfrequenzgang $|H(f)|$ und Amplitudenspektrum $|A(f)|$ eines Grenzzykus beim Beispiel B

ist zusammen mit den wichtigsten anderen in der Tabelle 3.3 aufgelistet. Zu deren Signalform ist in Bezug auf die Ausführungen in 2.5 folgendes zu bemerken:

1. Die größte Gleichablage hat die Größe $N_J + 1$, das ist der kleinste Wert, für den $|c_1'| = 1 + c_0'$ werden kann ($|c_1'| < 2$).
2. Der größte Grenzzzyklus mit $l_p \geq 3$ hat Sinusform und die Amplitude N_J ; weitere sinusförmige Schwingungen existieren mit kleineren Amplituden.
3. Bei Anfangszuständen $y(k+1) = y(k) + \delta < \left[\frac{0,5}{2 - |c_1|} \right] = 33$ mit $\delta = 1$ und $\delta = 2$ treten dreieckförmige Schwingungen (wegen $c_0' = 1$, $|c_1'| = 2$) auf, deren Periodenlänge sich etwa um den Faktor 2 unterscheidet.
4. Gleichablagen mit $|y| < 33$ sind ebenfalls möglich.

Grenzzykl. Form	Extremwerte in Q	Amplitude der gr. Spektrall. in dB	Periode l_p
Konstante	+74, -74	-52,92	1
Sinus	+71, -73	-53,05	50
	+67, -69	-53,66	50
	+63, -65	-54,2	48
	+59, -60	-55,0	48
abgerundetes	+42, -42	-58,5	50
Dreieck	+37, -38	-59,8	56
spitzes	+36, -36	-60,6	76
Dreieck	+34, -34	-61,5	139
Konstante	+22, -22	-63,5	1

Tabelle 3.3: Die wichtigsten Grenzzyklen im Block 2. Grades B bei Null am Eingang.

Bei Erregung mit einer Konstanten kommen u.a. auch alle obigen Grenzzyklen vor, aber mit dem Unterschied daß ihr Mittelwert nicht genau die Gleichantwort des linearen Systems ist, sondern von ihr bis zu etwa $\pm N_J$ abweichen kann.

Mit einem periodischen Eingangssignal, dessen Frequenz etwa der Polfrequenz entspricht ($l_p=68$), konnte wieder der unter b) beschriebene Schwellwerteffekt beobachtet werden. Solange das von einem linearen System mit gleichen Koeffizienten erwartete Ausgangssignal größer als -44,5 dB (11,5 dB über der Amplitude des größten Grenzzyklus) blieb, verhielt sich der Block B annähernd linear. Bei weiterer Abschwächung des Eingangssignal traten Grenzzyklen störend in Erscheinung. Eine Gleichablage konnte aber nicht festgestellt werden.

Mit einer Erregung außerhalb des Maximums der Übertragungsfunktion ($l_p=50$, Amplitude $1600 Q \cdot 2^{-r}$, Dreiecksform) wurde die Spektrallinie bei f_E im Ausgangssignal gemessen, die von der Grundwelle des Eingangssignals herrührt. Die Meßwerte für die Intensität sind in der Tabelle 3.4 eingetragen. Zum Vergleich enthält die Tabelle auch die für ein lineares System berechneten Werte. Zusätzlich wurde die Intensität der bei verringertem Eingangssignal bei der Polfrequenz f_p auftretenden Spektrallinie gemessen. Im Bild 3.5 sind für $r = 3$ die Amplitudenspektren des Eingangs- und des Ausgangssignals festgehalten. Die Zahlenwerte und die Bilder zeigen,

r	Amplitude $A(f_E)$ in dB		Amplitude $A(f_p)$ in dB
	lin. System	gemessene Werte	
0	- 38,5	-38,5	-58
1	- 44,52	-44,3	-56
2	- 50,54	-50,9	-59
3	- 56,56	-58,8	-63
4	- 62,58	≈ -60	-60
5	- 68,50	≈ -65	-54
6	- 74,52	≈ -63	-55

Tabelle 3.4 : Verhalten des Blocks 2.Grades aus Beispiel B bei Erregung außerhalb der Polfrequenz.

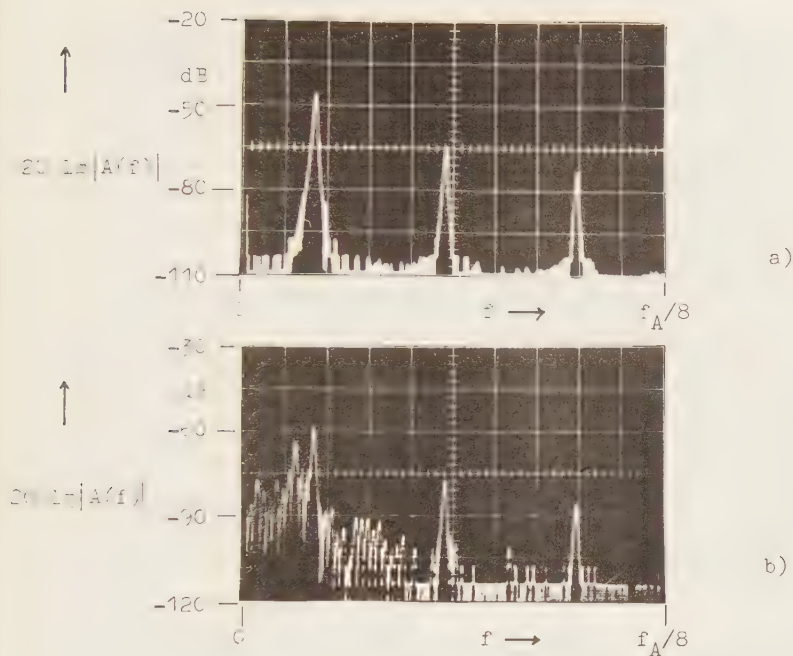


Bild 3.5 : Amplitudenspektren bei Erregung des Blocks aus
Beispiel B außerhalb von f_p und bei $r = 3$
a) Eingangssignal , Dreiecksfunktion mit dem Spitzen-
wert $200 Q$ und der Grundfrequenz $f_A/50$
b) Ausgangssignal

daß das Spektrum des Eingangssignals auch noch bei sehr kleinen Amplituden annähernd linear gefiltert im Ausgangssignal enthalten ist. Auf Grund der nichtlinearen Effekte im Block B tritt eine Reihe von zusätzlichen Spektrallinien zwischen 0 und $f_A/16$ auf . Die Linie mit der größten Intensität liegt etwa bei der Polfrequenz; ihre Amplitude unterliegt den Abschätzungen y_E , y_C für Grenzzyklen bei nicht erregten Blöcken 2.Grades. Eine Gleichablage tritt nicht auf.

3.4 Eine Abschätzungsformel für Grenzzyklen in einer Kaskade von Blöcken 2. Grades

Wegen der Schwierigkeit einer exakten theoretischen Analyse der Grenzzyklen in Kaskadenfiltern wurde von Schüßler /30/ eine Abschätzung nach dem Überlagerungsprinzip vorgeschlagen. Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen des Abschnitts 3.3 sprechen für die Anwendung dieses Prinzips. Besonders wichtig sind dabei die Erfahrungen, daß bei periodischer Erregung die Grenzzyklen nicht übermäßig verstärkt werden und daß im allgemeinen die wesentlichen Spektrallinien in der Nähe der Polfrequenz liegen. Damit fallen die Probleme, die Hess /6/ in der Unmöglichkeit einer exakten Bestimmung von Amplitude und Frequenz sah, nicht mehr so sehr ins Gewicht. Unter Vernachlässigung sowohl von Frequenzabweichungen der größten Spektrallinie als auch von Oberwellen und Subharmonischen wird nun das folgende lineare Modell aufgestellt:

- 1) bei periodischer Erregung entstehen am Ausgang eines Blocks 2. Grades im wesentlichen sinusförmige Schwingungen
- 2) die Frequenz dieses Signals liegt in der Nähe der Polfrequenz f_p
- 3) für die Amplitude der Schwingungen existiert eine Abschätzung, z.B. y_E , y_C oder y_{SK}

Mit diesen Annahmen führt lineare Überlagerung auf eine Abschätzung y_1 für die Amplitude der Grenzzyklen am Filterausgang einer Kaskade von 1 Blöcken 2. Grades

$$y_1 = \sum_{\lambda=1}^1 \left(y_{\lambda} \prod_{v=\lambda+1}^1 \left| H_v(f_{p,\lambda}) \right| \right). \quad (3-7)$$

Wegen der empirischen und nur näherungsweise zutreffenden Voraussetzungen ist diese Formel auch als empirisch zu betrachten.

Sie liefert einen Schätzwert für die tatsächlich auftretenden Werte und kann ohne weiteres über- oder unterschritten werden. Ihre Schärfe hängt sehr stark von der für y_λ verwendeten Schranke ab; Möglichkeiten sind z.B. S , y_C , y_E und y_{SK} nach den Angaben im 2. Kapitel.

3.5 Vergleich von absoluten Schranken und Schätzwerten mit experimentellen Meßwerten

Um einen Eindruck über die Treffsicherheit der Schranken (3-4) und (3-5) sowie der Abschätzung (3-7) zu bekommen, wurden 4 verschiedene digitale Filter /31/ untersucht. Die Koeffizienten und die Übertragungsfunktionen dieser Filter sind im Anhang A.2 dokumentiert. Es sind 1 Tiefpaß 8.Grades, 2 Tiefpässe 10 Grades mit verschieden breiten Übergangsbereichen und ein Bandpaß 16 Grades. Die Tabelle 3.5 enthält die Ergebnisse dieser Untersuchung:

Die absoluten Schranken sind unbrauchbar, da sie den Zahlenbereich meist überschreiten! Die Abschätzung (3-7) gibt mindestens die richtige Größenordnung an. In Anbetracht der geringen Information, die über die Nichtlinearitäten in das einfache Modell eingehen, liegen die Werte recht nahe bei den Meßwerten.

Filter	absolute	Schranken	Abschätzung (3-7) mit			Meßwert
	y_{BG} (3-4)	y_{MF} (3-5)	y_{SK}	y_C	y_E	
I Tiefpaß 8.Grad.	$3,7 \cdot 10^3$	$2,1 \cdot 10^4$	40	33	20	29
II Tiefpaß 10.Grad.	$7,3 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^5$	36	33	29	6
IV Tiefpaß 10.Grad.	$4,7 \cdot 10^5$	$1,04 \cdot 10^7$	97	94	45	80
V Bandpaß 16.Grad.	$1,4 \cdot 10^{13}$	$1,03 \cdot 10^{17}$	2146	495	401	235

Tabelle 3.5: Grenzzyklusabschätzung für 4 verschiedene digitale Filter

4. Anwendung von Betragsabschneiden und kontrollierter Rundung

Die relativ starke Störung durch die meist monofrequenten Grenzzyklen (z.B. in Sprechpausen bei Sprachverarbeitung) haben sehr früh die Suche nach Methoden zu ihrer Reduktion eingeleitet. Von Kao /32/ wurde dazu Betragsabschneiden (Abschneiden, "Truncation") vorgeschlagen. Mit der Entwicklung mathematischer Modellvorstellungen /33,34/ für den Quantisierungsfehler bei Abschneiden hat man inzwischen auch die Möglichkeit rauschoptimale Filter für diese Arithmetik zu entwerfen /35/.

4.1 Betragsabschneiden bei Blöcken 2. Grades (ohne Erregung) in der 1. und 2. kanonischen Form

Die Anwendung von Abschneiden in den Strukturen Bild 2.1 und Bild 2.2 bewirkt, daß nur noch Grenzzyklen der Länge $l_p \leq 2$ in einem Teilbereich des Koeffizientenbereichs auftreten können /32/. Mit der Methode der wirksamen Koeffizienten ergibt sich nämlich bei Betragsabschneiden

$$|c_0'| \leq |c_0| < 1$$

(d.h. Grenzzyklen mit $l_p \geq 3$ sind nicht möglich) , sowie

$$|c_1'| \leq |c_1| \quad .$$

Es ist dann für

$$|c_0| + |c_1| < 1 \quad (4-1)$$

auch $|c_0'| + |c_1'| < 1$

oder $|c_1'| < 1 - |c_0'| \leq 1 + c_0' \quad .$

Im Koeffizientenbereich (4-1) können also keine Grenzzyklen existieren. Der Bereich (siehe Bild 4.1) kann aber noch ausgedehnt werden auf

$$0 \leq c_0 < 1 \quad (4-2a)$$

$$|c_1| < 1$$

(4-2b)

da unter diesen Bedingungen

$$|c_1'| < 1 \leq 1 + c_0'$$

bleibt.

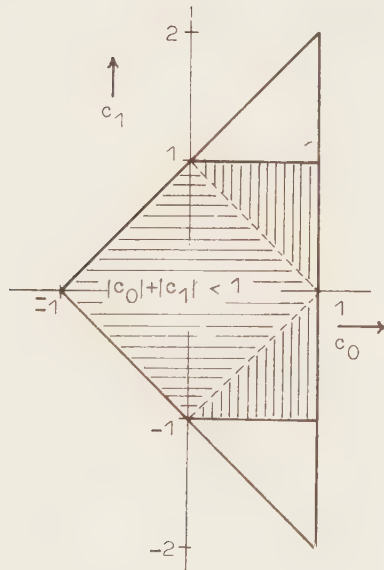


Bild 4.1 : Koeffizientenbereiche, die bei Betragsabschneiden frei von Grenzzyklen sind

Bei $|c_1| \geq 1$ kann $|c_1'| = 1 + c_0'$ werden, so daß das wirksame System bedingt stabil mit reellen Polen ist. In diesem Fall gilt

$$|c_1'| = \frac{2N-r}{N} ; r, N = 1, 2, 3, \dots \quad (4-3)$$

im Bereich

$$2 - \frac{r-1}{N} > |c_1| \geq 2 - \frac{r}{N} \quad (4-4)$$

und

$$c_0' = \frac{N-s}{N}; \quad s = 1, 2, 3, \dots \quad (4-5)$$

im Bereich

$$1 - \frac{s-1}{N} > c_0 \geq 1 - \frac{s}{N} \quad (4-6)$$

Aus (4-3) und (4-5) folgt

$$|c_1'| = 1 + c_0' + \frac{s-r}{N} \quad (4-7)$$

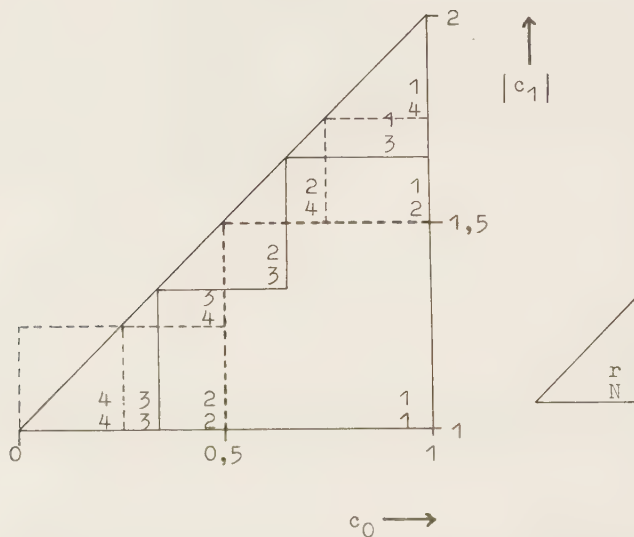


Bild 4.2 : Koeffizientenbereiche, in denen bei Abschneiden Grenzyklen der Amplitude $N \leq 4$ möglich sind

Mit $r=s=1,2,3,\dots,N$ und $N=1,2,3,\dots$, also unter der Bedingung, daß $r \leq N$ bleibt, beschreiben die Beziehungen (4-4) und (4-6) in allgemeiner Form die Gebiete im Koeffizientendreieck, in denen bei Abschneiden Grenzzyklen der Länge $l_p \leq 2$ mit der Amplitude N vorkommen. Im Bild 4.2 sind für $N \leq 4$ die entsprechenden Begrenzungen eingezeichnet. Da in (4-4) nur $|c_1| < 2 - \frac{r-1}{N}$ vorgeschrieben wird, ist zu ersehen, daß das Grenzzyklusverhalten in gewissen Bereichen über die Stabilitätsgrenze ($|c_1| < 1 + c_0$ für lineare Systeme) hinaus bestehen bleibt.

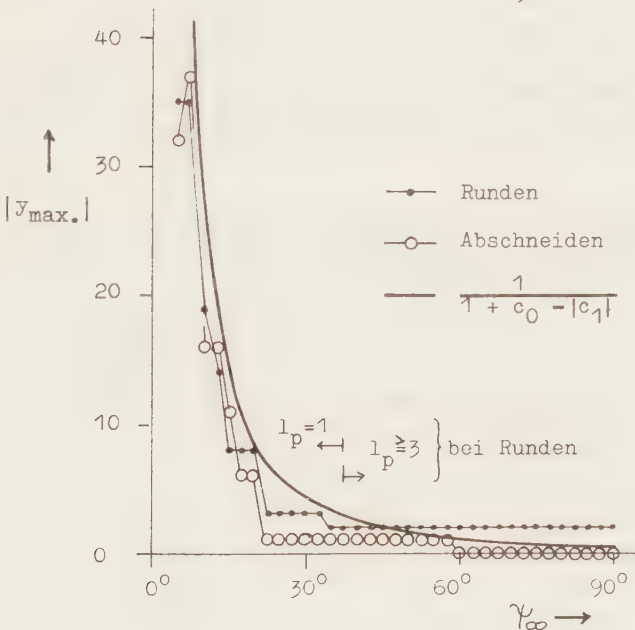


Bild 4.3 : Größte Grenzzyklusamplituden bei Runden bzw. bei Abschneiden in einem Block 2. Grades mit $c_0 = 0,9$

Dieser Bereich ist in Bild 4.2 gestrichelt für $r = N = 4$ eingezeichnet. Als absolute Amplitudenschranke erhält man $/1,32/$ unter Berücksichtigung der Vorzeichen der Quantisierungsfehler

$$|y| = N_{\max} \leq \frac{1}{1+c_0-|c_1|} \quad (4-8)$$

Im Bild 4.3 ist diese Schranke bei konstantem $\varphi_\infty = \sqrt{c_0} = 0,9$ über φ_∞ zusammen mit experimentellen Meßwerten aufgetragen. Es ist zu sehen, daß (4-8) die treppenförmig verlaufende Kurve der Meßwerte recht gut annähert. Da (4-8) auch eine absolute Schranke für Grenzzyklen der Länge $l_p \leq 2$ bei Runden ist, wurden die für Runden gemessenen Werte auch eingezeichnet. Sie liegen teilweise noch näher an der Schranke, als die für Abschneiden.

Andererseits kann aus einem Vergleich beider Meßwertkurven geschlossen werden, daß Betragsabschneiden bei kleinen Polwinkeln ($\varphi_\infty \approx 20^\circ$) größere Grenzzyklausamplituden hervorrufen kann als Runden, und deshalb in diesem Bereich eher Nachteile als Vorteile mit sich bringt.

4.2 Filter 2. Grades ohne Grenzzyklen bei Betragsabschneiden und verschwindendem Eingangssignal

In der Struktur nach Bild 2.2 ist es grundsätzlich möglich, bei verschwindendem Eingangssignal und Betragsabschneiden Grenzzyklen mit Hilfe zusätzlichen Aufwands vollständig zu unterdrücken. Dazu können im System die Größen

$$y(k), c_0' \cdot y(k) \text{ und } c_1' \cdot y(k)$$

abgefragt und zur Erkennung der Bedingung für die Instabilität

$$|c_1'| = 1 + c_0'$$

herangezogen werden. Wenn sie erfüllt ist, führt eine Korrektursubtraktion zu einer Modifikation der Zustandsbeschreibung (2-1)

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= \begin{bmatrix} -c_1 & x_1(k) \end{bmatrix} Q - Q \cdot \text{sign} \left(\begin{bmatrix} -c_1 & x_1(k) \end{bmatrix} Q \right) + x_2(k) \\ x_2(k+1) &= \begin{bmatrix} -c_0 & x_1(k) \end{bmatrix} Q \end{aligned} \quad (4-9)$$

Dadurch verringert man $|c_1'|$; das wirksame System wird stabil. Der mit diesen Maßnahmen verbundene relativ große Aufwand führte zur Suche nach Strukturen, die leichter erkennen lassen, ob sich die wirksamen Koeffizienten auf dem Stabilitätsrand befinden. Als Ergebnis dieser Suche wird ein System mit der folgenden Zustandsbeschreibung vorgeschlagen.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ (a_1 - a_2)a_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

Das Bild 4.4 zeigt das entsprechende Blockschaltbild.

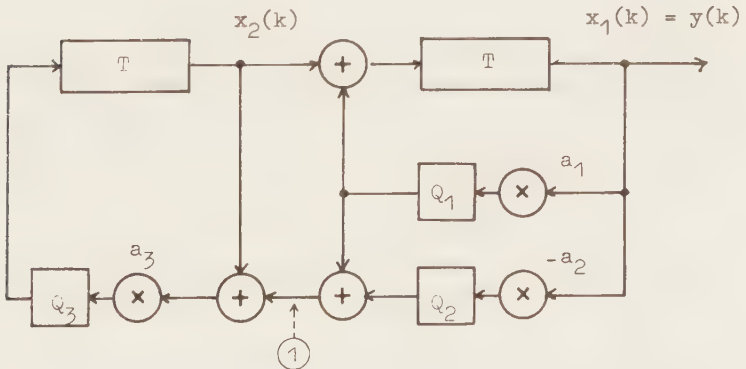


Bild 4.4 : Rekursiver Block 2. Grades nach (4 - 10)

Auf einen nichtrekursiven Teil zur Erzeugung von Nullstellen soll hier nicht eingegangen werden. Die Polstellen des Systems sind die Nullstellen des Polynoms

$$z^2 - (a_1 + a_3)z + a_2 \cdot a_3$$

woraus die Filterkoeffizienten in der üblichen Darstellung abgelesen werden können.

$$c_1 = -a_1 - a_3 \quad (4-11a)$$

$$c_0 = a_2 \cdot a_3 \quad (4-11b)$$

4.2.1 Einschränkung der Wertebereichs von a_3

Mit der Vereinfachung, daß der Faktor a_3 nur die Werte

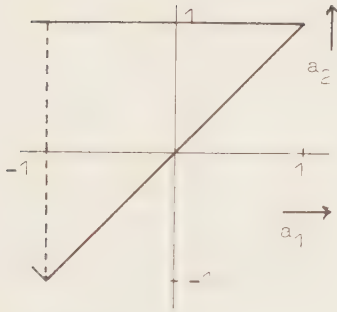
$$a_3 = \pm 1 \quad (4-12)$$

annehmen kann, erhält man die Stabilitätsbedingungen für das lineare System und die möglichen Polwinkel γ_∞ , wie sie in der Tabelle 4.1 angegeben sind. Im Bild 4.5

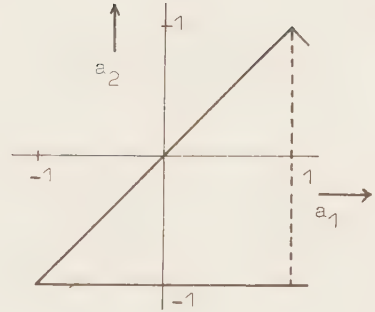
	$a_3 = 1$	$a_3 = -1$
$ c_0 < 1$	$ a_2 < 1$	$ a_2 < 1$
$ c_1 < 1 + c_0$	$-2 - a_2 < a_1 < a_2$	$a_2 < a_1 < 2 - a_2$
Polwinkel γ_∞	$0^\circ \leq \gamma_\infty \leq 90^\circ$	$90^\circ \leq \gamma_\infty \leq 180^\circ$
Bereich von a_1	$a_2 > a_1 \geq -1$	$1 \geq a_1 > a_2$

Tabelle 4.1 : Stabilitätsbedingungen für ein rekursives System 2. Grades nach (4-10) und (4-12) .

wurden die Gebiete stabiler linearer Filter in die Koeffizientenebene eingezeichnet.



a) $a_3 = 1$



b) $a_3 = -1$

Bild 4.5 : Koeffizientengebiete stabiler linearer Filter nach (4-10) und (4-12)

Die gestrichelte Begrenzungslinie stellt dabei keinen Stabilitätsrand dar; sie entsteht auf Grund der Fallunterscheidung zwischen positivem und negativem a_3 .

Bei Anwendung von Betragsabschneiden in den Quantisierern Q_1 und Q_2 in Bild 4.4 erhält man wirksame Koeffizienten

$$|a_1'| < 1 \text{ und } |a_2'| < 1.$$

Grenzyklen mit Perioden $l_p \geq 3$ sind laut Tabelle 4.1 nicht möglich, sondern nur $l_p \leq 2$, wenn $a_2' = a_1'$ wird. Die Lage des wirksamen Systems auf dem Stabilitätsrand $a_2' = a_1'$ bewirkt aber, daß das Zwischenergebnis an der Stelle ① in Bild 4.4 zu Null wird. Es entstehen zwei kaskadierte einzelne Blöcke 1. Grades. Der zweite (mit dem Koeffizienten a_1) ist wegen $|a_1'| < 1$ bei Abschneiden absolut stabil $/32,1/$. Der erste aber ist

bedingt stabil, da $a_3 = \pm 1$ den vollen Betrag von $x_2(k)$ zurück führt. Hier sind zur Stabilisierung zusätzliche Maßnahmen erforderlich. Es werden im folgenden zwei verschiedene Möglichkeiten erörtert:

1) An Stelle von (4-12) kann man

$$a_3 = \pm (1 - Q) \quad (4-13)$$

zur Erzielung von $|a_3'| < 1$ vorgeben, ohne daß die Stabilitätsbedingungen von Tabelle 4.1 verletzt werden. Die Realisierung von (4-13) mit einem Schieberegister und einem Addierer einschließlich der Abschneidestelle Q_3 bedeutet keinen großen Mehraufwand. Nachteilig wirkt sich allerdings die Einführung von Q_3 in Form eines höheren Quantisierungsrauschens aus.

2) Die Durchführung von (4-13) oder der Operation

$$x_2(k+1) = a_3 x_2(k) - Q \cdot \text{sign} [a_3 x_2(k)]$$

(beide bewirken $|a_3'| < 1$) kann abhängig gemacht werden von einer Abfrage, ob das Signal bei ① im Bild 4.4 Null ist. In diesem Fall wird bei normalen Filterbetrieb mit Eingangssignal das Quantisierungsrauschen praktisch nur von den Quantisierern Q_1 und Q_2 bestimmt. Die Abfrage und die zusätzliche Arithmetikumschaltung erhöhen aber den Aufwand.

4.2.2 Einschränkung des Wertebereichs von a_2

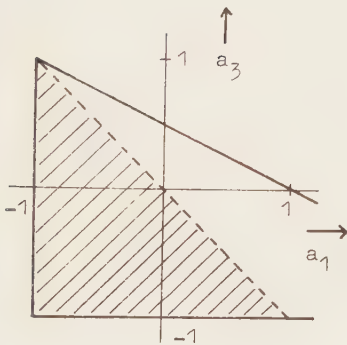
Eine Vereinfachung des Systems (4-10) erzielt man auch, wenn a_2 nur die Werte

$$a_2 = \pm 1 \quad (4-14)$$

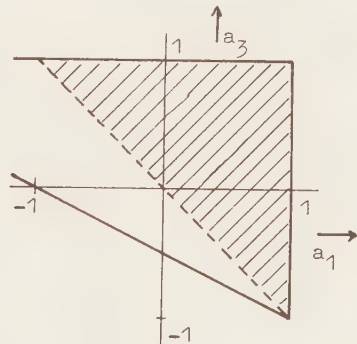
annehmen kann. Das lineare System ist unter den in der Tabelle 4.2 angegebenen Bedingungen stabil. Die dabei entstehenden Abgrenzungen wurden im Bild 4.6 in die Koeffizientenebene eingezeichnet.

	$a_2 = 1$	$a_2 = -1$
$ c_0 < 1$	$ a_3 < 1$	$ a_3 < 1$
$ c_1 < 1 + c_0$	$-(1+2a_3) < a_1 < 1$	$-1 < a_1 < 1-2a_3$
Polwinkel γ_∞	$0^\circ \leq \gamma_\infty \leq 90^\circ$	$90^\circ \leq \gamma_\infty \leq 180^\circ$
Bereich von a_1	$1 > a_1 \geq -a_3$	$-a_3 \geq a_1 > -1$

Tabelle 4.2 : Stabilitätsbedingungen für ein rekursives System
2. Grades nach (4-10) und (4-14)



a) $a_2 = -1$



b) $a_2 = +1$

Bild 4.6 : Koeffizientengebiete stabiler linearer Filter
nach (4-10) und (4-14)

Im Fall von Grenzzyklen der Periode $l_p \leq 2$ gilt

$$x_1(k+1) = v \cdot x_1(k) ; \left\{ \begin{array}{l} v = +1, \quad l_p = 1 \\ v = -1, \quad l_p = 2 \end{array} \right\} \quad (4-15)$$

Das im Bild 4.7 gekennzeichnete Hilfssignal $x_H(k)$ ist

$$x_H(k) = x_1(k+1) - a_2 x_1(k) \quad ; \quad (4-16)$$

es wird

$$x_H(k) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für } a_2 = v \\ 2 \cdot v \cdot x_1(k) & \text{für } a_2 = -v \end{array} \right\} .$$

Im Fall $x_H(k) = 0$ besteht keine Rückführung mehr in den ersten Zustandsspeicher. Dem entspricht ein wirksamer Koeffizient

$a_3' = 0$, so daß die Stabilitätsbedingung in Tabelle 4.2 auf $|a_1'| < 1$ schrumpft, was mit Betragsabschneiden erfüllt ist.

Wenn $x_H(k) = 2v \cdot x_1(k) =: 2vN$ wird, führen die Bedingungen

$$a_3' \cdot 2vN + a_1'N = vN, \quad l_p = 1 \quad (4-17a)$$

$$-a_3' \cdot 2vN + a_1'N = vN, \quad l_p = 2 \quad (4-17b)$$

auf Grenzzyklen. Zur Bestimmung der Koeffizientenbereiche, für die das wirksame System entsprechend (4-17a,b) auf dem Stabilitätsrand liegt (siehe auch Tabelle 4.2), werden die wirksamen Koeffizienten zu

$$|a_1'| = \frac{N - n}{N} \quad (4-18a)$$

$$\text{und} \quad |a_3'| = \frac{N - m}{N} \quad (4-18b)$$

angenommen. Aus Bild 4.6 ist noch zu entnehmen, daß die wirksamen Koeffizienten a_1' und a_3' bei Abschneiden nur dann auf dem Stabilitätsrand liegen können, wenn

$$a_2 \cdot a_3 < 0$$

ist. Bei $l_p = 1$ ($a_2 = -1$) müssen daher $a_1 < 0$ und $a_3 > 0$ sein, während bei $l_p = 2$ ($a_2 = 1$) $a_1 > 0$ und $a_3 < 0$ sein müssen. Unter diesen Voraussetzungen erhält man aus (4-17) mit (4-15)

$$\begin{aligned} |a_3'| \cdot 2N - |a_1'| \cdot N &= N \\ -|a_3'| \cdot 2N + |a_1'| \cdot N &= -N \end{aligned}$$

und daraus mit (4-18) in beiden Fällen

$$n = 2m \quad . \quad (4-19)$$

Die Koeffizientenbereiche für Grenzzyklen der Länge $l_p \leq 2$ mit der Amplitude N ergeben sich aus (4-18) und (4-19) zu

$$1 - \frac{2m}{N} \leq \left\{ \begin{array}{l} -a_1 \quad ; \quad a_2 = -1 \\ +a_1 \quad ; \quad a_2 = 1 \end{array} \right\} < 1 - \frac{2m-1}{N} \quad (4-20a)$$

$$1 - \frac{m}{N} \leq \left\{ \begin{array}{l} +a_3 \quad ; \quad a_2 = -1 \\ -a_3 \quad ; \quad a_2 = 1 \end{array} \right\} < 1 - \frac{m-1}{N} \quad (4-20b)$$

$$N = 1, 2, 3, \dots, \quad ; \quad m = 1, 2, \dots, N \quad . \quad (4-20c)$$

Mit diesen Bedingungen folgt für die Grenzzklusgebiete

$$a_1 + a_3 > \frac{m-1}{N} \quad \geq \quad 0 \quad \text{bei} \quad a_2 = -1$$

$$\text{und} \quad a_1 + a_3 < \frac{1-m}{N} \quad \leq \quad 0 \quad \text{bei} \quad a_2 = 1 .$$

Diese Gebiete liegen aber außerhalb der in den Bildern 4.6.a,b schraffierten, für die Koeffizienten vorgesehenen Bereiche. Daher ist für Koeffizienten innerhalb der schraffierten Gebiete (was keine Einschränkung der möglichen Pollagen bedeutet) ein Block 2. Grades nach (4-10) mit der Vereinfachung (4-14) bei Betragsabschneiden absolut stabil, also frei von Grenzzyklen.

4.3 Ein Block 2. Grades mit Betragsabschneiden nach Addition der unverkürzten Produkte

Bekanntlich kann eine Verringerung des Quantisierungsrauschens

erzielt werden, wenn die Addition der Produkte mit einer Wortlänge erfolgt, die größer als die des Signals ist und erst danach auf die endgültige Wortlänge gerundet wird /33,36/. Von Claasen et.al. wurde vorgeschlagen, bei einem Block 2.Grades in der 2. kanonischen Form (siehe Bild 2.1) die beiden Produkte mit doppelter Wortlänge zu addieren und danach mit Betragsabschneiden zu verkürzen /37,38/. Wegen der Quantisierung durch Abschneiden geht der für Runden oben erwähnte Vorteil des Zusammenfassens verloren, das Quantisierungsrauschen kann erheblich anwachsen /35,39/. Dafür existieren Grenzzyklen mit $l_p \geq 3$ nur in einem sehr eingeschränkten Koeffizientenbereich /38/; und die Wahrscheinlichkeit für ihr Auftreten ist relativ gering.

Daß Grenzzyklen mit $l_p \leq 2$ nicht möglich sind, soll im folgenden gezeigt werden: Für das Ausgangssignal eines Blocks 2. Grades in der beschriebenen Konfiguration gilt

$$y(k+2) = \left[-c_1 y(k+1) - c_0 y(k) \right]_A \quad . \quad (4-21)$$

Eine Periodenlänge $l_p \leq 2$ liegt vor bei

$$y(k+2) = y(k) = \pm y(k+1) \quad ,$$

was durch Einsetzen in (4-21) zu der notwendigen Bedingung

$$1 + (-|c_1| + c_0)' = 0 \quad (4-22)$$

führt. Die Größe $(-|c_1| + c_0)'$ symbolisiert dabei die "wirksame Koeffizientensumme" bei Abschneiden. Wegen der Stabilitätsbedingung $|c_1| < 1 + c_0$ für das lineare System ist

$$-|c_1| + c_0 > -1$$

und auf Grund des Betragsabschneidens auch

$$(-|c_1| + c_0)' > -1 \quad ,$$

so daß die Gleichung (4-22) nicht erfüllt werden kann. D.h. das nichterregte System kann keine Grenzzyklen mit $l_p \leq 2$

erzeugen.

4.4 Betragsabschneiden in Wellendigitalfilterstrukturen

4.4.1 Pseudopassivität und asymptotische Stabilität

Eine der bemerkenswerten Eigenschaften von Wellendigitalfiltern ist die sog. Pseudopassivität /41/. Sie besagt, daß eine quadratische positiv definite Funktion (- genannt Pseudoleistung-) der Zustandsvariablen notwendigerweise mit wachsender Zeit gegen Null strebt, wenn das System pseudopassiv ist. Von Fettweis und Meerkötter wurde gezeigt, daß ein solches Wellendigitalfilter bei verschwindendem Eingangssignal frei von Grenzyklen ist, wenn die in die Zustandsspeicher zurückgeführten Signale mit Betragsabschneiden quantisiert werden /42/.

Die Pseudoleistung entspricht einer Lyapunovfunktion. Die Pseudopassivität kann mit einer erfolgreichen Stabilitätsprüfung nach der direkten Methode von Lyapunov nachgewiesen werden. Dazu sei das diskrete lineare System gegeben durch die Zustandsdarstellung in Matrixschreibweise

$$\underline{x}(k+1) = \underline{A} \cdot \underline{x}(k) \quad (4-23)$$

mit $\underline{x}(k) = [x_1(k), x_2(k)]^T$ für ein System 2. Grades. Nach Lyapunov ist das System asymptotisch stabil, wenn eine skalare positiv definite Funktion $V[\underline{x}(k)]$ existiert mit

$$\Delta V[\underline{x}(k+1), \underline{x}(k)] = V[\underline{x}(k+1)] - V[\underline{x}(k)] = -W[\underline{x}(k)]$$

und $W[\underline{x}(k)]$ ebenfalls eine skalare positiv definite Funktion ist /44/. Eine oft benutzte allgemeine Energiefunktion ist die quadratische Form

$$V[\underline{x}(k)] = \underline{x}^T(k) \underline{P} \underline{x}(k) \quad . \quad (4-24)$$

Dabei muß die symmetrische Matrix

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p \\ p & p_{22} \end{bmatrix}$$

positiv definit sein, was mit den Bedingungen von Sylvester

$$p_{11} > 0$$

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p \\ p & p_{22} \end{vmatrix} = p_{11} p_{22} - p^2 > 0$$

sichergestellt werden kann.

Damit wird

$$\Delta V = \underline{x}^T(k) \left[\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} - \underline{P} \right] \underline{x}(k) = - \underline{x}^T(k) \underline{R} \underline{x}(k) .$$

Die asymptotische Stabilität des linearen Systems (4-23) kann durch Auffinden symmetrischer positiv definiter Matrizen $\underline{P}$ und $\underline{R}$ bewiesen werden, die der Gleichung

$$\underline{A}^T \underline{P} \underline{A} - \underline{P} = -\underline{R} \quad (4-25)$$

genügen. Bei positiv semidefinitem $\underline{R}$ liegt nur einfache Stabilität vor. Für Systeme 2. Grades mit

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r \\ r & r_{22} \end{bmatrix}$$

führt (4-25) auf

$$\begin{bmatrix} a_{11}^2 - 1 & 2 a_{11} a_{21} & a_{21}^2 \\ a_{11}^2 a_{12} & a_{11} + a_{12} a_{21} - 1 & a_{21}^2 a_{22} \\ a_{12} & 2 a_{12} a_{22} & a_{22}^2 - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} \\ p \\ p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{11} \\ r \\ r_{22} \end{bmatrix} \quad (4-26)$$

Gelingt es nicht, die Gleichung (4-25) bzw. (4-26) zu lösen, so ist damit nicht die Instabilität gezeigt. Es kann auch die Energiefunktion V unpassend gewählt worden sein. Dieses Stabilitätsprüfungsverfahren hat also den Nachteil, daß es zwar hinreichende aber keine notwendigen Bedingungen für die asymptotische Stabilität liefert. So konnte beispielsweise trotz längerer Suche keine geeignete Lyapunovfunktion für die in 4.2.2 vorgestellte Struktur gefunden werden.

4.4.2 Beispiele für pseudopassive Strukturen 2. Grades

Von Meerkötter und Wegener /43/ wurde ein System mit

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 1+a_1 \\ a_2-1 & a_2 \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

vorgeschlagen. Das charakteristische Polynom

$$z^2 - (a_1+a_2) z + 1+a_1-a_2$$

läßt auf die Nennerkoeffizienten der Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} c_1 &= -a_1-a_2 \\ c_0 &= 1+a_1-a_2 \end{aligned}$$

und auf den im Bild 4.8 angegebenen Stabilitätsbereich für das lineare Filter schließen /43/. Ein Blockschaltbild

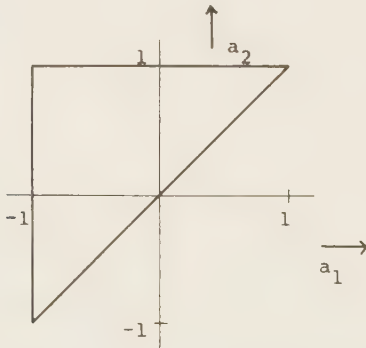


Bild 4.8 : Stabilitätsbereich für die Systeme
nach (4-27) und (4-28)

für das System (4-27) ist im Bild 4.9 gezeigt. Gegenüber einem Block in der 1. kanonischen Form enthält es zwei zusätzliche Signalpfade.

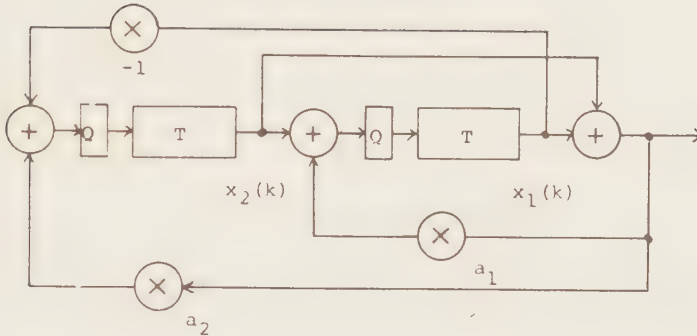


Bild 4.9 : Blockschaltbild des Systems
nach (4-27)

Zum Nachweis der Pseudopassivität kann man

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1-a_2 & 0 \\ 0 & 1+a_1 \end{bmatrix}$$

und $r=r_{11}=r_{22}=(1+a_1) \cdot (1-a_2) \cdot (a_2-a_1)$ wählen. Die Gleichung (4-26) ist damit erfüllt.

Als weiteres Beispiel eines einfach realisierbaren pseudo-passiven Blocks 2. Grades soll das folgende System behandelt werden:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ (1+a_1) \cdot (a_2-1) & a_2 \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

Für die Nennerkoeffizienten von $H(z)$ erhält man wieder

$$\begin{aligned} c_1 &= -a_1 - a_2 \\ c_0 &= 1+a_1 - a_2 \end{aligned}$$

so daß auch der Stabilitätsbereich für das lineare System der gleiche bleibt (siehe Bild 4.8). Ein mögliches Blockschaltbild ist in Bild 4.10 gezeichnet.

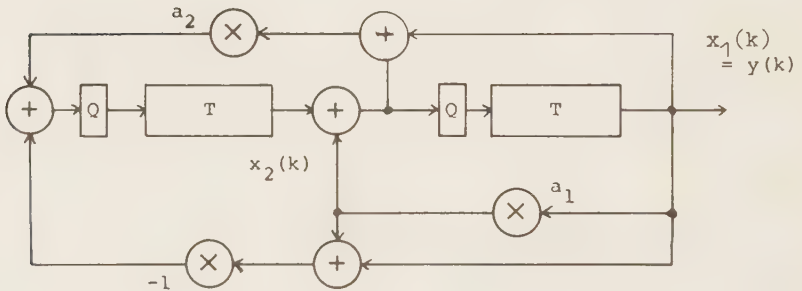


Bild 4.10 : Blockschaltbild des Systems
nach (4-28)

Die Stabilität und die Pseudopassivität läßt sich zeigen, indem man in der Gleichung (4-25)

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} (1+a_1) \cdot (1-a_2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = (1-a_2) \cdot (a_2-a_1) \cdot \begin{bmatrix} (1+a_1)^2 & 1+a_1 \\ 1+a_1 & 1 \end{bmatrix}$$

wählt. Der Block ist bei Abschneiden frei von Grenzyklen, wenn kein Eingangssignal vorhanden ist.

4.5 Kontrollierte Rundung

Ähnlich wie Betragsabschneiden ist auch die sog. kontrollierte Rundung geeignet, Grenzzyklen zu verringern bzw. zu unterdrücken. Sie wurde zuerst für einen Block 2. Grades in der 2. kanonischen Form vorgeschlagen /45/. Bei Addition der doppelt genauen Produkte und anschließender Quantisierung mit dem Fehler $\Delta(k)$ gilt

$$y(k+1) = -c_1 y(k) - c_0 y(k-1) + \Delta(k) \quad .$$

Es wurde in /45/ bewiesen, daß Grenzzyklen der Periodenlänge $l_p \geq 3$ nicht auftreten können, wenn die Quantisierung so gesteuert wird, daß für den Fehler $\Delta(k)$ immer

$$\Delta(k) \cdot [y(k-1) - y(k+1)] \geq 0$$

erfüllt ist. Grenzzyklen mit $l_p \leq 2$ sind dagegen durchaus möglich; ihre Amplitude kann mit

$$|y| \leq \frac{1}{1 + c_0 - |c_1|}$$

abgeschätzt werden.

Bei Anwendung der kontrollierten Rundung auf bestimmte Wellen-digitalfilterstrukturen können Grenzzyklen der Länge $l_p \leq 2$ nicht auftreten. Die in /46/ vorgestellte Struktur ist ohne Eingangssignal und bei konstanter Erregung frei von Grenzzyklen. Als Nachteile müssen aber eine Abhängigkeit der Nullstellen von den Nennerkoeffizienten und das im Betrieb hohe Quantisierungs-rauschen /35,47/ in Kauf genommen werden.

4.6 Verhalten von erregten Systemen mit Betragsabschneiden bzw. kontrollierter Rundung.

Bereits bei einem konstanten Eingangssignal gehen die Vorteile des Abschneidens verloren. Sowohl in eigenen Untersuchungen

als auch in der Literatur /1,7,48/ wurde festgestellt, daß bei konstanter Erregung nahezu alle Formen von Grenzzyklen als Schwingungen um eine Gleichablage vorkommen, wobei die Amplitude aber bis zu doppelt so groß wie bei Runden werden kann. Eine Ausnahme stellt nur die kontrollierte Rundung dar; das Filter nach /46/ ist auch mit Gleicherregung frei von Grenzzyklen. Dagegen sind in Wellendigitalfiltern mit Betragsabschneiden bei konstantem Eingangssignal parasitäre Schwingungen möglich /46/. Erklären kann man dieses Verhalten damit, daß die besonderen Eigenschaften der Quantisierungskennlinie für Betragsabschneiden /1,33/ um den Nullpunkt bei Auslenkung des Systems mit einem konstanten Signal nicht mehr genutzt werden können.

Bei Filtern mit Kaskadenstruktur hat es also wenig Sinn, Blöcke zu verwenden, die ohne Erregung Grenzzyklen mit $l_p \leq 2$ erzeugen. Die nachfolgenden Teilfilter würden dann eventuell größere Grenzzyklen aufweisen als bei Runden. Vermeiden kann man diesen Effekt nur mit Strukturen, die bei verschwindendem Eingangssignal frei von Grenzzyklen sind (z.B. nach 4.2 und 4.5). Dieser Vorteil geht aber verloren, wenn das Eingangssignal $u(k) = \text{const.} \neq 0$ wird. In diesem Fall sind auch in solchen Filtern Grenzzyklen möglich.

Bezüglich des Quantisierungsrauschens bei annähernd stochastischen Signalen (z.B. Sprache) soll im wesentlichen auf die Literaturstellen /25,33,34,35,39,47/ verwiesen werden. Grundsätzlich gilt aber, daß Betragsabschneiden und kontrollierte Rundung wesentlich größere Quantisierungsfehler erzeugen als Runden und daß sich die Eigenschaften grenzzyklusarmer Strukturen (z.B. Wellendigitalfilter) zumeist zusätzlich ungünstig auf die Quantisierungsrauschleistung auswirken.

5. Beeinflussung und Unterdrückung von Grenzzyklen mit stochastischen Hilfssignalen

Das hervorstechende Merkmal einer Grenzzyklesschwingung in einem rekursiven digitalen Filter ist die strenge Periodizität sowohl des Ausgangssignals $y(k)$ als auch der Fehlerfolgen $\Delta_v(k)$ an den Quantisierungsstellen. Diese zyklische Struktur kann mit Hilfe von Rauschsignalen in verschiedenen Methoden mehr oder weniger stark gestört werden. Es ist damit möglich, Grenzzyklen teilweise oder auch vollständig zu unterdrücken.

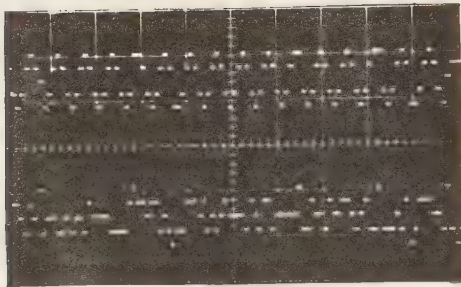
5.1 Addition von Rauschen zum Eingangssignal

Bei der digitalen Messung von Signalparametern (z.B. bei der Korrelation) wird in vielen Fällen der Einfluß des Quantisierungsfehlers im Analog/Digital-Wandler durch Addition von "dither" zum Signal verringert /49/. In ähnlicher Weise wirkt sich ein zum Eingangssignal hinzugefügtes Rauschen auf Grenzzyklen aus /26/. Wenn das Eingangssignal verschwindet, wird das Filter immer noch stochastisch erregt. Die Systematik eines Grenzzykklus kann aber nur gestört werden, wenn das additive Rauschen so groß ist, daß es nach Multiplikation mit den Zählerkoeffizienten b_v in der 1. kanonischen Form, bzw. mit einem Skalierungsfaktor b_z in der 2. kanonischen Form noch auf die Rückführungsschleife Einfluß nehmen kann. Bei Rundung muß das Produkt

$$|b_v| \cdot |u(k)|_{\max} \geq Q/2$$

sein, damit wenigstens bei den Spitzenwerten des Eingangssignals ein Betrag von 1 Quantisierungsstufe oder mehr in die Rekursion eingespeist wird.

Im Bild 5.1 ist am Beispiel eines Blocks 2. Grades gezeigt, daß ein zu kleines Rauschsignal ($\pm 2Q$) den Grenzzykklus ($l_p=6$, $|y|=2$) kaum beeinflusst (Beispiel a). Erst bei größeren Spitzenwerten ($\pm 8Q$) ist das Ausgangssignal rauschartig (b).



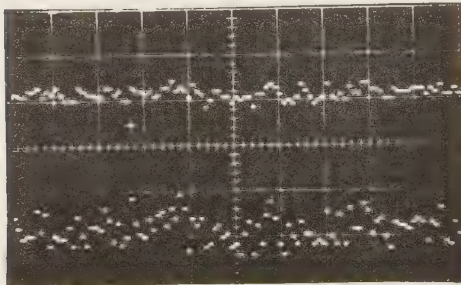
Ausgangssignal $y(k)$

3,13 Q / Skt.

Eingangssignal $u(k)$

$|u(k)| \leq 2Q$

a) nahezu unbeeinfluster Grenzzzyklus



Ausgangssignal $y(k)$

12,5 Q / Skt.

Eingangssignal $u(k)$

$|u(k)| \leq 8Q$

b) rauschartiges Ausgangssignal bei größerem $u(k)$

b_0, b_2	b_1	c_0	c_1
0,27704	-0,21572	0,75123	-0,75330

c) Koeffizienten in oktaler Form

Bild 5.1 : Beispiele zur Beeinflussung von Grenzzyklen
mit kleiner rauschartiger Erregung

In einer Kaskade von Blöcken 2. Grades ist es außerdem möglich, daß sich das stochastische Signal nur auf die vorderen Teilfilter auswirkt und die letzten Blöcke ungehindert Grenzzyklen erzeugen. Ein weiterer Nachteil ist die Einschränkung des Dynamikbereiches für das Eingangssignal.

5.2 Zufallsarithmetik ("mixed arithmetic").

Ohne Einschränkung des Dynamikbereiches für das Eingangssignal und in allen Blöcken eines Kaskadenfilters gleichzeitig wirkt die sog. Zufallsarithmetik /23/, die in /25/ auch "mixed arithmetic" genannt wurde. Dabei werden die Quantisierer in den Rekursionsschleifen von einer binären Zufallsfolge zwischen Runden und Abschneiden umgeschaltet. Im Interesse einer niedrigen mittleren Quantisierungsrauschleistung ist die Verteilung der Binärfolge so eingestellt, daß in 90% der Zeit die Rundung wirksam ist. Die Zeit mit Abschneiden reicht aber aus, um Grenzzyklen zu reduzieren. Die Meßergebnisse in der Tabelle 5.1 zeigen für 2 Filterbeispiele die Leistung der Grenzzyklen im Vergleich zur Quantisierungsrauschleistung /25/. Die Messungen erfolgten im

Filter	Arithmetik	Rauschleistung	Grenzz.-Leistung
I	Runden	8,5 ϱ^2	417 ϱ^2
	Betragsabschneiden	28,0 ϱ^2	4,7 ϱ^2
	Zufallsarithm.	9,8 ϱ^2	keine Grenzzykl.
III	Runden	12,3 ϱ^2	40,5 ϱ^2
	Betragsabschneiden	54,4 ϱ^2	21,2 ϱ^2
	Zufallsarithm.	14,8 ϱ^2	max. 8,0 ϱ^2

Tabelle 5.1: Vergleich verschiedener Arithmetiken

Aufbau nach Bild 2.3 am programmierbaren rekursiven digitalen Filter /40/, an dem die Art der Arithmetik für die Rekursion von außen steuerbar ist.

Bei bestimmten Koeffizienten in Blöcken 2. Grades in der ersten (und auch in der zweiten) kanonischen Form sind aber Grenzzyklen mit $l_p \leq 2$ sowohl bei Abschneiden als auch bei Runden möglich. Die entsprechenden Koeffizienten und Amplituden findet man durch Vergleich der Bilder 2.16 und 4.2 bzw. der sie generierenden Formeln. Die Verhaltensweise von Grenzzyklen beim Umschalten von Runden auf Abschneiden und Zufallsarithmetik ist in Bild 5.2 an Beispielen gezeigt. Beim Tiefpaß 8. Grades (a) verkleinert Abschneiden die parasitären Schwingungen; bei Zufallsarithmetik werden sie vollständig unterdrückt. Im anderen Beispiel (Filter III) bewirkt Abschneiden ebenfalls eine Verkleinerung der Grenzzyklen. Bei Anwendung der Zufallsarithmetik kann das Ausgangssignal zu Null werden (b), es ist aber mit anderen Anfangszuständen auch eine nichtverschwindende rauschähnliche Ausgangsfolge mit relativ kleiner mittlerer Leistung möglich (c). Die Ursache dafür ist ein Grenzzyklus mit $N=1$ und $l_p=1$ im 2. Block des Filters (Koeffizienten siehe A2). Er tritt sowohl bei Runden als auch bei Abschneiden auf und erregt den nachfolgenden Filterteil mit einem konstanten Wert.

Diesen Nachteil kann man vermeiden, wenn man an Stelle der 1. oder 2. kanonischen Form Blöcke 2. Grades verwendet, die bei Abschneiden frei von Grenzzyklen sind (z.B. nach 4.2 oder 4.4). In diesem Fall werden mit Zufallsarithmetik alle Arten von Grenzzyklen unterdrückt, wenn das Eingangssignal zu Null wird.

Es ist nicht unbedingt nötig, beide Quantisierer in der Rückführung umzuschalten. Unabhängig von den hier wiedergegebenen Untersuchungen haben Kiebertz et.al. /22,50/ festgestellt, daß bei der 2. kanonischen Form in vielen Fällen allein die Zufallsarithmetik nach Multiplikation mit c_0 (und Runden bei c_1) ausreicht, um die Grenzzyklen zu reduzieren, und daß es nur

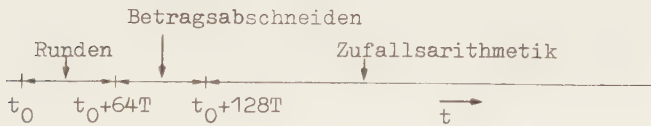
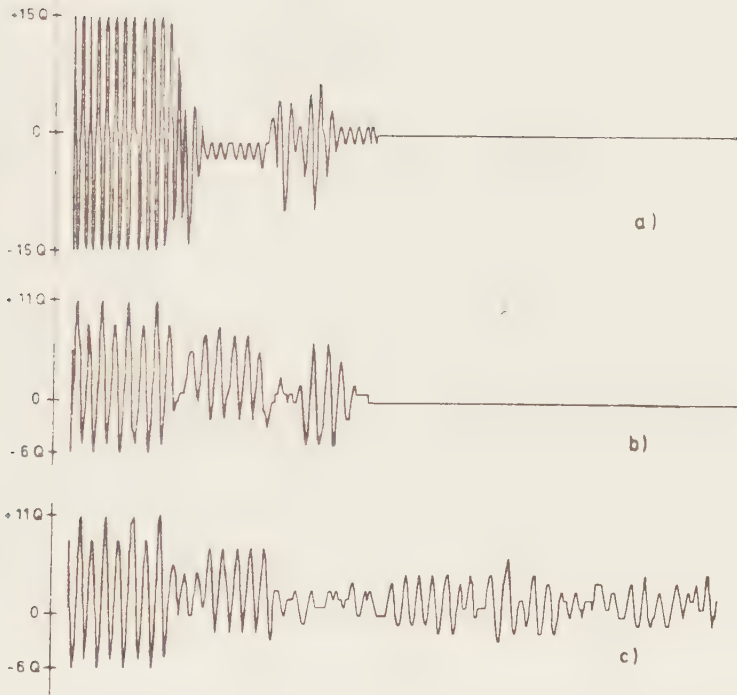


Bild 5.2 : Veränderung von Grenzyklen bei Umschaltung der Filterarithmetik

a) Filter I , b) Filter III

c) Filter III mit anderen Umschaltzeitpunkten als unter b

kleine Koeffizientenbereiche gibt, in denen die Anwendung der Zufallsarithmetik auch nach der Multiplikation mit c_1 eine weitere Verbesserung bringt.

Zur Realisierung einer Zufallsarithmetik ist ein binärer Rauschgenerator mit unsymmetrischer Verteilung (z.B. $w(1)=0,1$) erforderlich; er kann mit geringem Aufwand aufgebaut werden. Nach Tabelle 5.1 läßt sich die Zunahme des Quantisierungsrauschens innerhalb von weniger als 20% der Rundungsrauschleistung halten.

5.3 Zufallsrunden ("random-rounding")

Bei herkömmlicher Rundung im Zweierkomplementcode wird im unverkürzten Produkt die Stelle r mit der Wertigkeit $1/2 Q$ abgefragt und -versehen mit der Wertigkeit $1 Q$ - zum abgeschnittenen Produkt addiert (siehe Bild 5.3).

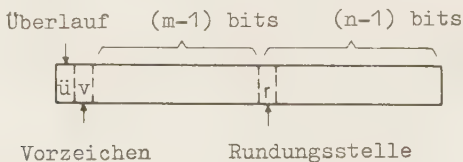


Bild 5.3 : Rundung bei einem Produkt aus 2 Faktoren
mit m bzw. n Stellen einschließlich Vorzeichen

Wenn an Stelle der ursprünglichen Rundungsstelle r ein Wert $r(k)$ aus einer gleichverteilten binären Zufallsfolge $\{r(k)\}$ mit der Wertigkeit $1 Q$ aufaddiert wird, ist der Rundungsfehler von der Zufallsfolge beeinflusst. Die Methode wird als Zufallsrunden /51,54/ bzw. " random-rounding " /52,53/ bezeichnet. Bei voller Ausnutzung der auch für normales Runden üblichen

Schaltelemente wird zur Realisierung zusätzlich nur ein einfacher Zufallsgenerator benötigt, wie er im Anhang A3 beschrieben ist. Das Verfahren wird in den folgenden Abschnitten bezüglich seiner Wirkung auf das Quantisierungsrauschen und auf Grenzzyklen näher untersucht.

Eine Weiterführung dieses Prinzips wurde unabhängig kürzlich von Callahan angegeben /56/. Dabei wird an Stelle einer binären Zufallsfolge ein im Bereich

$$0 \leq r_n(k) < Q$$

gleichverteiltes Rauschsignal mit einer Wortlänge $w = n-1$ (siehe Bild 5.3) zum Produkt addiert und danach abgeschnitten. Dieses "random-rounding" hat den Vorteil, daß der Erwartungswert des Quantisierungsfehlers

$$E[\Delta_{rr}] = 0$$

wird; d.h. im Mittel arbeitet das System aus Multiplizierer und Quantisierer linear. Bei Gleichverteilung der Produktwerte zwischen den Quantisierungsstufen (entspricht einer Gleichverteilung des normalen Rundungsfehlers) beträgt die mittlere Quantisierungsrauschleistung nur

$$\overline{\Delta_{rr}^2} = Q^2/6 \quad .$$

Diese Eigenschaften wurden aus /56/ entnommen. Dort sind aber keinerlei Angaben über die Auswirkungen auf Grenzzyklen zu finden. Wegen des relativ großen Aufwands (siehe z.B./18/) zur Erzeugung von gleichverteilten Zufallszahlen mit der Wortlänge $w=n-1$, wird das Verfahren auch hier nicht näher untersucht.

5.3.1 Der Quantisierungsfehler bei Zufallsrunden (ZR) hinter einem einzelnen Multiplizierer.

5.3.1.1 Theoretische Betrachtung

Gegeben sei das unverkürzte Produkt P in der Darstellung

$$P \doteq \sum_{m=1}^M B_m 2^{-m} \quad ; \quad B_m \in \{0,1\} \quad . \quad (5-1)$$

Unter Verwendung einer gleichverteilten binären Zufallsfolge $\{r(k)\}$ ergibt die Quantisierung mit ZR auf die Quantisierungseinheit

$$Q = 2^{-q}, \quad 1 < q < M$$

das Ergebnis

$$P_{ZR} = \left[P + \begin{cases} \pm 0, & B_{q+1} = r \\ + Q/2, & B_{q+1} = 0 \wedge r = 1 \\ - Q/2, & B_{q+1} = 1 \wedge r = 0 \end{cases} \right]_R \quad (5-2)$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$w \left[P_{ZR} = (N+1) \cdot Q \right] = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad (5-3a)$$

$$w \left[P_{ZR} = N \cdot Q \right] = \frac{1}{2} \quad . \quad (5-3b)$$

Es wurde dabei

$$P = (N+x) \cdot Q \text{ mit } N \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq x < 1 \quad (5-4)$$

vorausgesetzt. Ein Überschreiten von $(N+1) \cdot Q$ bzw. Unterschreiten von NQ ist nicht möglich, da

$$NQ \leq \left[NQ + xQ \pm Q/2 \right]_R \leq (N+1) \cdot Q$$

ist. Der Mittelwert bezüglich Zufallsrunden ist mit

$$\widetilde{P}_{ZR} = \frac{1}{2} (N+1)Q + \frac{1}{2} NQ = (N + 0,5)Q \quad (5-5)$$

unabhängig von x . Für die Abweichung dieses Mittelwerts vom exakten $P = (N+x)Q$ bei festem x gilt

$$\widetilde{P}_{ZR} - P(x) = (0,5 - x)Q \quad .$$

Für die Wahrscheinlichkeiten und die Größe des Quantisierungsfehlers Δ_{ZR} erhält man aus (5-3) und (5-4)

$$w \left[\Delta_{ZR} = (1-x) \cdot Q \right] = \frac{1}{2} \quad (5-6a)$$

$$w \left[\Delta_{ZR} = -x Q \right] = \frac{1}{2} \quad (5-6b)$$

und den Mittelwert bezüglich ZR für festes x

$$\widetilde{\Delta_{ZR}} = Q(1-x)/2 - Qx/2 = (0,5 - x)Q ; \quad (5-7)$$

er ist in Bild 5.4a aufgetragen.

Die Fehlerleistung Δ_{ZR}^2 hat den Mittelwert

$$\widetilde{\Delta_{ZR}^2} = (1-x)^2 Q^2/2 + x^2 Q^2/2 = Q^2(0,5-x+x^2) ; \quad (5-8)$$

das Minimum mit $Q^2/4$ liegt bei $x=1/2$ (siehe Bild 5.4b).

Bei gleichverteilten Zahlen x erhält man die Erwartungswerte des Quantisierungsfehlers Δ_{ZR} und der Fehlerleistung durch Integration über x

$$E[\Delta_{ZR}] = \int_0^1 \widetilde{\Delta_{ZR}}(x) dx = Q \int_0^1 (0,5-x) dx = 0 \quad (5-9)$$

und

$$E[\Delta_{ZR}^2] = \int_0^1 \widetilde{\Delta_{ZR}^2}(x) dx = Q^2 \int_0^1 (0,5-x+x^2) dx = Q^2/3 \quad (5-10)$$

Bei einer anderen Betrachtungsweise /51,53/ wird vom normalen Rundungsfehler Δ_R ausgegangen. Dazu sind in Tabelle 5.2 die 4 möglichen Kombinationen zwischen ursprünglicher und zufälliger Rundungsstelle zusammen mit den dabei erzeugten Fehlern angegeben. Nimmt man an, daß alle Kombinationen gleich häufig auftreten, so erhält man den zeitlichen Mittelwert

$$\overline{\Delta_{ZR}^2} = \frac{1}{2} \left[\overline{|\Delta_R|^2} + \overline{(Q - |\Delta_R|)^2} \right] . \quad (5-11)$$

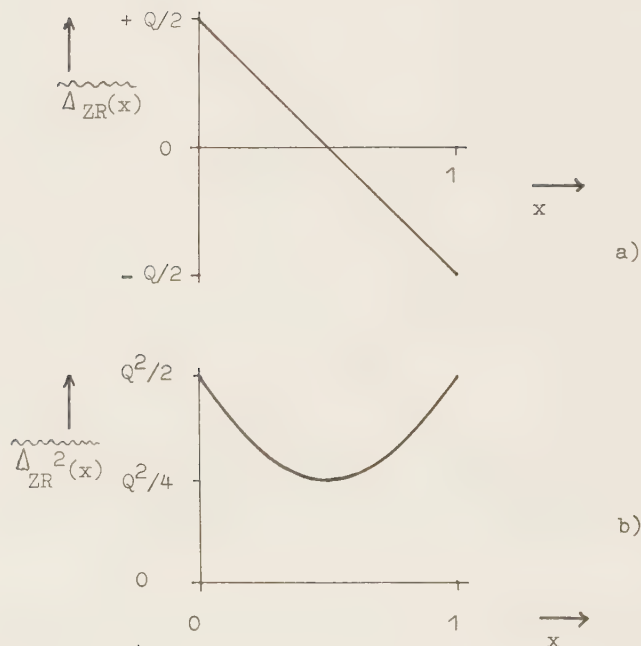


Bild 5.4 : Verlauf der Mittelwerte von Δ_{ZR} und Δ_{ZR}^2 in Abhängigkeit der Lage des Produktwertes zwischen zwei Quantisierungsstufen

ursprüngl. Rundungsst.	zufällige Rundungsst.	Rundungs- fehler	zusätzlicher Fehler	Gesamt- fehler
0	0	$- \Delta_R $	0	$- \Delta_R $
0	1	$- \Delta_R $	+ Q	$Q - \Delta_R $
1	0	$+ \Delta_R $	- Q	$-Q + \Delta_R $
1	1	$+ \Delta_R $	0	$+ \Delta_R $

Tabelle 5.2 : Quantisierungsfehler bei Zufallsrunden

Setzt man wie üblich Δ_R als gleichverteilt (entspricht einer Gleichverteilung von x in (5-4))

mit

$$-\sqrt{2} < \Delta_R \leq \sqrt{2} \quad (5-12a)$$

und

$$\overline{\Delta_R^2} = Q^2/12 \quad (5-12b)$$

an ,so wird wieder

$$\overline{\Delta_{ZR}^2} = Q^2/3 \quad (5-13)$$

Unter der Voraussetzung eines gleichverteilten normalen Rundungsfehlers Δ_R nach (5-12) ist die Verteilungsdichtefunktion

$$p(\Delta_{ZR}) = 1/(2Q) ; -Q < \Delta_{ZR} \leq Q, 0 \text{ sonst} \quad (5-14)$$

wie in Bild 5.5 gezeichnet.

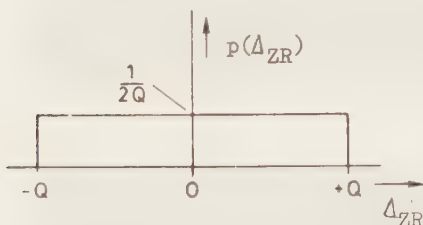


Bild 5.5 : Verteilungsdichtefunktion von Δ_{ZR} bei gleichverteiltem Δ_R

5.3.1.2 Experimentelle Untersuchung bei diskret verteilten Signalen

Nach den Angaben für den Gesamtfehler in der Tabelle 5.2 tritt bei gleicher Häufigkeit der 4 Kombinationen der normale

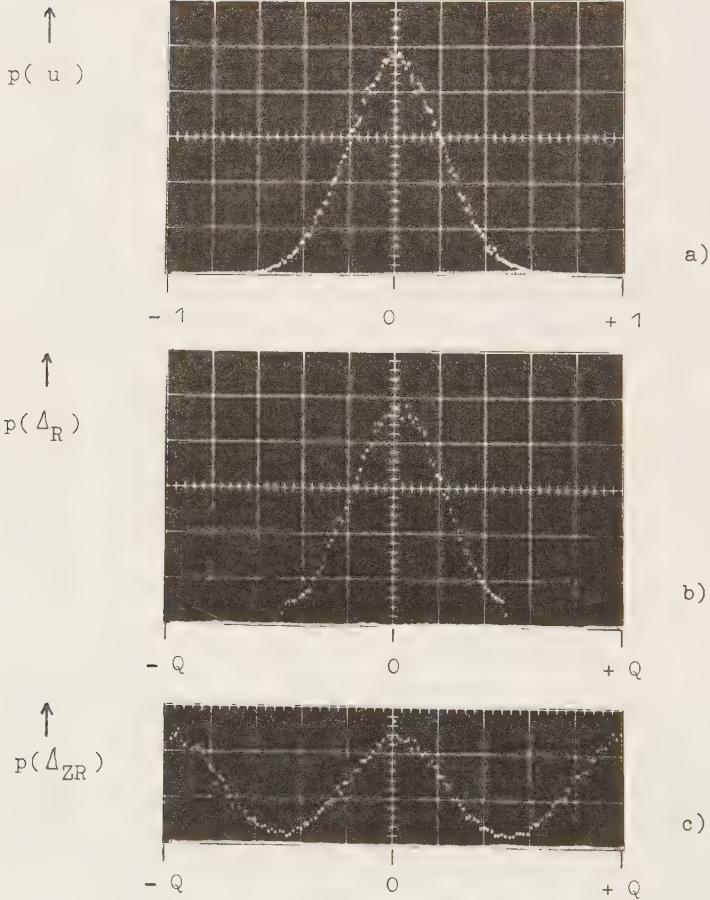


Bild 5.6 : Zur Abbildung der Signalverteilung in den
Quantisierungsfehler beim Koeffizienten $1 Q_c$
a) Signal $u(k)$
b) Fehler bei Runden
c) Fehler bei Zufallsrunden

Rundungsfehler $+\Delta_R$ und $-\Delta_R$ nur je mit der Wahrscheinlichkeit $1/4$ auf. Zusätzlich jedoch werden (jeweils mit der Wahrscheinlichkeit $1/4$) die negativen Werte von Δ_R um $+Q$ und die positiven Fehlerwerte um $-Q$ verschoben. Die von Eckhardt /33/ angegebene Abbildung der diskreten Signalverteilung in die Verteilungsfunktion des Rundungsfehlers wird dadurch um eine Abbildung auf den Bereich von Δ_{ZR} erweitert. Durch die Verschiebung erhalten (z.B. bei gaußverteilterm Signal, siehe Bild 5.6) große

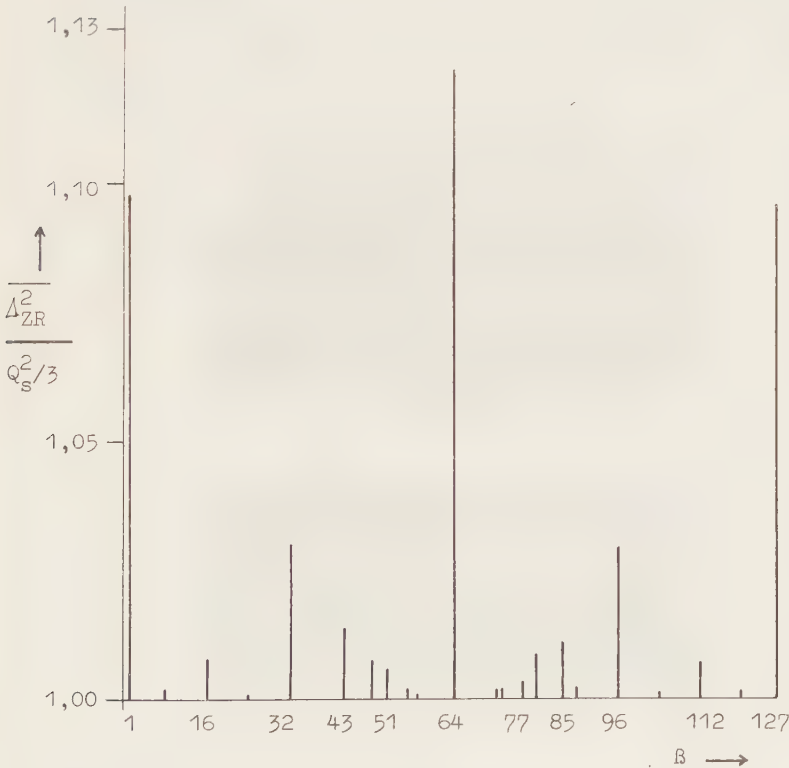


Bild 5.7 : Meßwerte der bezogenen Fehlerleistung bei ZR für Koeffizienten $B \cdot Q_c$ mit $Q_s = Q_c = 2^{-7}$

Fehlerwerte (bei $\pm Q$) die gleiche Häufigkeit wie kleine Fehlerwerte (bei 0). Damit ist die Modellvorstellung einer Gleichverteilung bei Δ_{ZR} besser erfüllt als bei Δ_R . Andererseits ist aber nicht mehr damit zu rechnen, daß kleinere Fehlerleistungen als der theoretische Wert $Q^2/3$ auftreten. Zur experimentellen Überprüfung dieses Verhaltens wurde (ähnlich wie in /33/) bei annähernd gaußverteilterm Signal die Fehlerleistung für Koeffizienten von 1 bis $127 Q_c$ gemessen, wobei die Quantisierungsstufen für Signal und Koeffizienten $Q_s = Q_c = 2^{-7}$ waren. Die Ergebnisse sind bezogen auf die Leistung $Q_s^2/3$ im Bild 5.7 eingetragen. Die maximale Abweichung tritt bei $\beta=64$ auf. Sie ist mit 1,122 aber wesentlich kleiner als der Wert 1,5 bei Runden /33/.

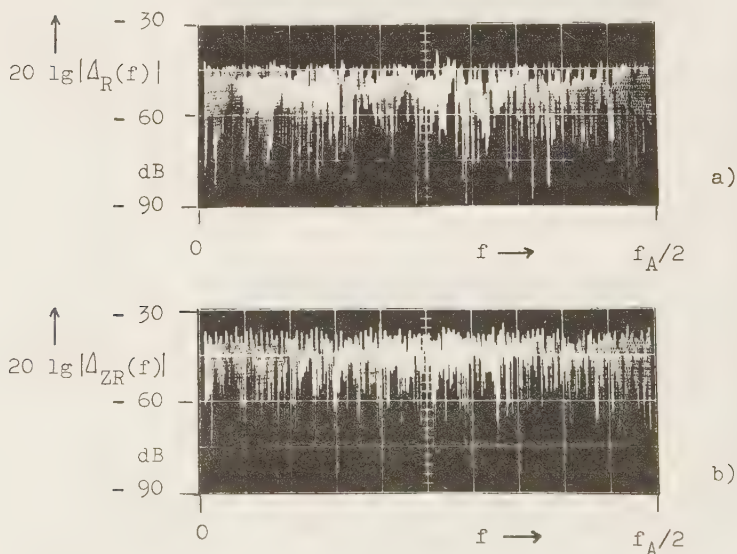


Bild 5.8 : Spektren der Quantisierungsfehler bei annähernd gaußförmigem Signal

- a) Runden $\Delta_R^2 = 1,5 Q_s^2/12$
 b) Zufallsrunden $\Delta_{ZR}^2 = 1,12 Q_s^2/3$
 der Koeffizient ist $64 Q_c = 0,5$

Außer der mittleren Leistung des Quantisierungsfehlers interessiert vor allem seine spektrale Verteilung. Mit dem ungünstigsten Koeffizienten $64 \cdot Q_C = 1/2$ wurden Spektren sowohl für Zufallsrunden als auch für Runden gemessen. Im Bild 5.8 mit dem annäherndgaußverteiltem Rauschen als Signal sind beide Spektren weiß. Der Unterschied in der mittleren Leistung ist an den verschiedenen Pegeln zu erkennen. Deutlicher ist die Auswirkung von ZR auf das Fehlerspektrum am 2. Beispiel zu sehen. Hier dient ein streng periodischer Sinus mit 8 Abtastwerten pro Periode als Eingangssignal. Das Spektrum von Δ_R in Bild 5.9a mit wenigen diskreten Linien läßt die Abhängigkeit des

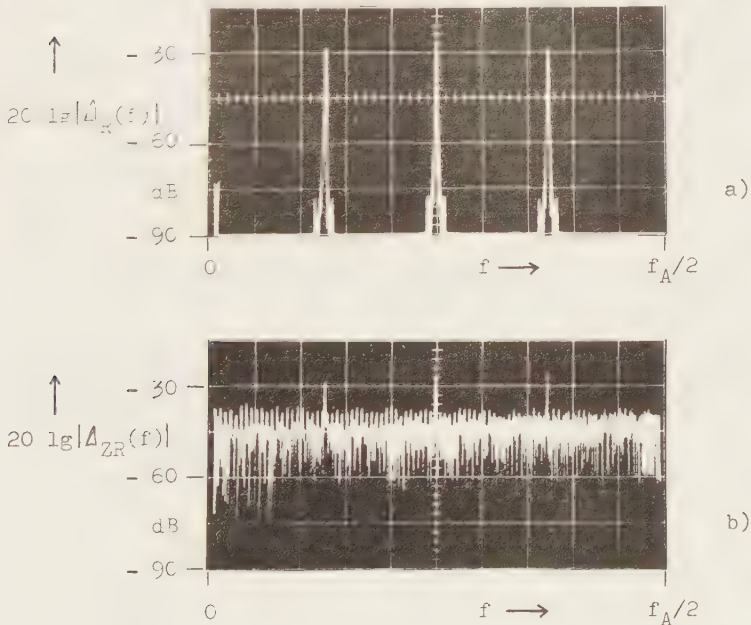


Bild 5.9 : Spektren der Quantisierungsfehler bei streng periodischem Sinussignal der Frequenz $f = f_A/8$ und dem Koeffizienten $64 Q_C = 0,5$
a) Runden , b) Zufallsrunden

Rundungsfehlers vom Signal erkennen. Bei Zufallsrunden dagegen wird der ganze Frequenzbereich aufgefüllt mit weißem Rauschen, aus dem lediglich bei den Harmonischen der Signalfrequenz diskrete Linien um etwa 8 dB herausragen.

5.3.1.3 Lineares Modell für ZR

Aufbauend auf theoretischen wie experimentellen Ergebnissen wird eine lineare Modellvorstellung für den Quantisierungsfehler bei ZR aufgestellt. Sie besagt:

- der Quantisierungsfehler ist weißes Rauschen
- die Verteilungsdichtefunktion ist eine Konstante $1/(2Q)$ im Bereich $-Q < \Delta_{ZR} \leq Q$, Null außerhalb.
- der Quantisierungsfehler ist unabhängig vom Signal
- der Mittelwert des Quantisierungsfehlers ist Null
- die mittlere Fehlerleistung ist $Q^2/3$

Dieses lineare Modell kann ähnlich wie die Modelle für Runden oder Abschneiden zur theoretischen Analyse von Filterstrukturen und zur Rauschoptimierung bei ZR verwendet werden.

5.3.2 Unterdrückung von Grenzzyklen in Blöcken 2.Grades mit Zufallsrunden

Die Anwendung von ZR ist an keinerlei Bedingungen bezüglich der Struktur gebunden. Um ein möglichst niedriges Quantisierungsrauschen zu erzielen, werden die beiden Grundstrukturen für Blöcke 2. Grades benutzt, die am wenigsten Rundungsstellen besitzen.

Bei einem Filter 2.Grades in der 1.kanonischen Form benötigt man nur 3 Rundungsstellen, wenn die Nennerprodukte und die entsprechenden Zählerprodukte in voller Wortlänge addiert und dann erst der Rundungsoperation unterworfen werden (Bild 5.10). Der Block in der 2. kanonischen Form (Bild 5.11) enthält nur eine einzige Rundungsstelle, wenn man voraussetzt, daß bei Kaskadenschaltung die Ausgangssummation mit der Eingangsaddition des nächsten Blocks erfolgt.

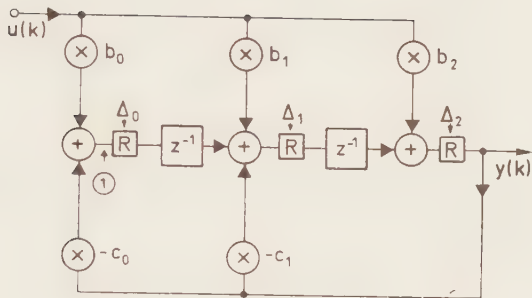


Bild 5.10 : Block 2. Grades in der 1. kanonischen Form mit nur 3 Rundungsstellen

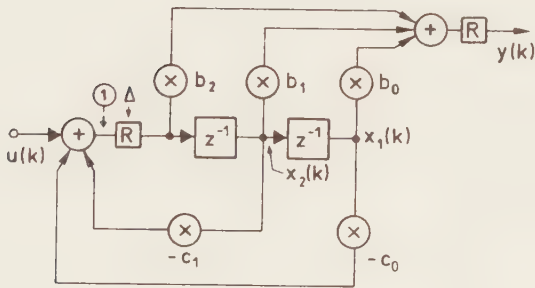


Bild 5.11 : Block 2. Grades in der 2. kanonischen Form

Im Fall von Grenzzyklen (wenn $u(k) = 0$, konstant oder periodisch ist) erzeugt das periodische Signal im Rückführungszweig beider Strukturen periodische Rundungsfehler. Zur Verhinderung von Grenzzyklen reicht es aus, einen vom rückgeführten Signal unabhängigen zufälligen Rundungsfehler an einer Stelle der Rekursionsschleife, z.B. an den mit ① bezeichneten Signalen, einzuführen.

5.3.2.1 Ersetzen des Rundungsbits nach der Summation unverkürzter Produkte (ZR1)

Für diese erste Art der Zufallsrundung ist in Bild 5.12 ausschnittsmäßig die Anordnung angegeben. Die Addition erfolgt mit voller Wortlänge; dann ersetzt der Momentanwert von $r(k)$ das Rundungsbit, bevor die Rundung durchgeführt wird.

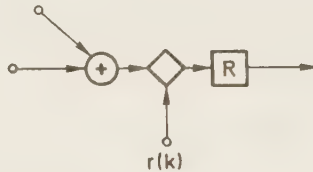


Bild 5.12 : Schema für ZR1

Die Eigenschaften des entstehenden Quantisierungsfehlers sind die gleichen wie bei ZR nach einem einzelnen Multiplizierer in 5.3.1.

Es gilt

$$\overline{\Delta_{ZR1}^2} = Q^2/3 \quad (5-15a)$$

$$p(\Delta_{ZR1}) = 1/(2Q) ; -Q < \Delta_{ZR1} \leq Q \quad (5-15b)$$

Für die Anwendung auf Blöcke 2. Grades nach Bild 5.10 bzw. 5.11 bei Erregung mit einem Eingangssignal nimmt man ähnlich wie bei Runden /1/ unabhängige Rauschquellen nach (5-12) an.

Bei der 1. kanonischen Form erhält man als mittlere Quantisierungsrauschleistung

$$\overline{N_{ZR1}} = 6 \cdot \frac{Q^2}{12} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) H(z^{-1}) z^{-1} dz \quad (5-16)$$

Das ist das doppelte wie bei normalem Runden.

Ähnlich ist das Ergebnis

$$\overline{N'_{ZR1}} = 4 \cdot \frac{Q^2}{12} \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint H'(z) H'(z^{-1}) z^{-1} dz + \frac{Q^2}{12} \quad (5-17)$$

für die 2. kanonische Form herzuleiten. In (5-16) ist $H(z)$ die Übertragungsfunktion von den einzelnen Quantisierungsstellen bis zum Ausgang, d.h. ohne die Zählerkoeffizienten. Bei $H'(z)$ in (5-17) sind dagegen die Nullstellen enthalten.

5.3.2.2 Anwendung von ZR1 in einem Block 2. Grades extrem hoher Güte

Um die Auswirkung von ZR1 experimentell mit dem vorhandenen rekursiven digitalen Filter /40/ zeigen zu können, wurde die 1. kanonische Form nach Bild 5.10 mit den Koeffizienten nach Tabelle 5.3 gewählt. Aus dem Koeffizienten $c_0 = 1-2^{-15}$ ist zu ersehen, daß das konjugiert komplexe Polpaar so nahe am Stabilitätsrand liegt, wie es bei 16 bit Wortlänge möglich ist.

Koeff.	Oktaler Wert	Grenzzyklus bei Runden		Restrauschen bei ZR1	
		Extremwerte	Leistung	Extremwerte	Leistung
b_2, b_0	0	+16387 Q	$1,33 \cdot 10^8 Q^2$	+4 Q	$1,14 Q^2$
b_1	+0,4				
c_1	-1,176	-16390 Q		-3 Q	
c_0	+0,77777				

a)

b)

Tabelle 5.3: Zum Block 2. Grades hoher Güte

a) Koeffizienten

b) größter Grenzzyklus bei Runden und Restruschen bei ZR1

Die Meßergebnisse in Tabelle 5.3b zeigen, daß im Gegensatz zum sinusförmigen Grenzzzyklus mit einer Amplitude über den halben Aussteuerungsbereich bei Runden, das Restrauschen bei ZR1 nur wenige Quantisierungsstufen umfaßt. Die mittlere Leistung ist bei Runden $1,33 \cdot 10^8 Q^2$ und bei ZR1 nur $1,14 Q^2$.

Außer dem Amplitudenunterschied ist im Bild 5.13 die breite spektrale Verteilung der Energie des Restrauschens (b), sowie die Konzentration auf eine Spektrallinie beim Grenzzzyklus (a) zu sehen. Zur Demonstration der Wirksamkeit des Verfahrens soll noch Bild 5.14 dienen. Bei Runden ergab sich wieder der Grenzzzyklus von Bild 5.13a. Zum Zeitpunkt $k_0 T$ wurde dann die ZR1 eingeschaltet und das Abklingen der Amplitude des Grenzzzyklus über der Zeit aufgetragen. Das Restrauschen ist etwa nach 52000 Abtastintervallen erreicht.

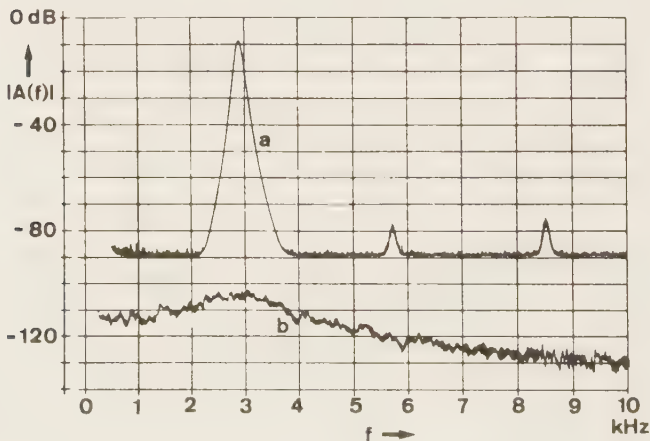


Bild 5.13 : Spektren des Ausgangssignals beim Block
2. Grades hoher Güte
a) Grenzzzyklus bei Runden
b) Restrauschen bei ZR1

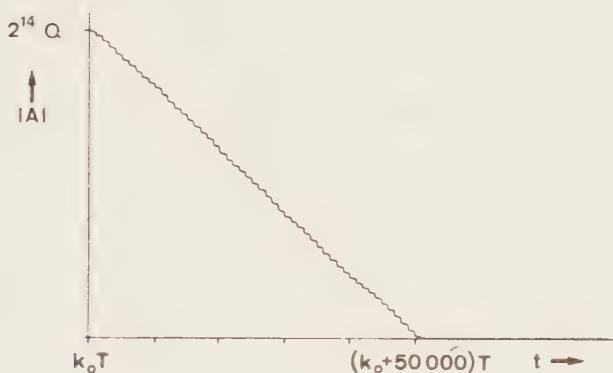


Bild 5.14 : Abklingen des Grenzyklus nach Einschalten der ZR1 im Block 2. Grades hoher Güte

5.3.2.3 Verringerung des Quantisierungsrauschens

Es ist möglich, die mittlere Rauschleistung bei ZR zu reduzieren, indem man das Rundungsbit durch den Momentanwert von $r(k)$ ersetzt, bevor die Addition mit voller Wortlänge durchgeführt wird (siehe Bild 5.15a). Dies kann im Rückführzweig nach Multiplikation mit c_0 geschehen. Bei dieser Methode ist der Einfluß der anderen Signale, die ebenfalls dem Addierer zugeführt werden, aber nicht mehr zu vernachlässigen. In Abhängigkeit vom Eingangssignal und der Struktur können Grenzyklen auftreten. Deshalb wird im folgenden diese Zufallsrundung 2. Art (ZR2) für verschiedene Eingangssignale $u(k)$ näher untersucht.

a) $u(k) \neq \text{const.}$, nicht periodisch.

In diesem Fall können in beiden kanonischen Strukturen (siehe Bilder 5.10 und 5.11) bei Runden des mit ① gekennzeichneten Signals zwei unabhängige Fehlerquellen angenommen werden.

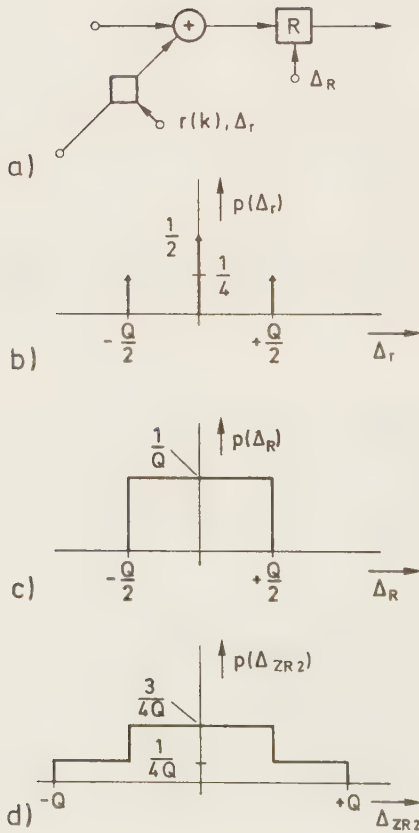


Bild 5.15 : Zur Zufallsrundung 2. Art (ZR2)

a) Schema

b) , c) Verteilungsdichtefunktionen
der Teilfehler

d) Verteilungsdichtefunktion des Gesamtfehlers

Zum einen bewirkt das Austauschen des Rundungsbits nach Multiplikation mit c_0 einen Fehler

$$\Delta_r = -Q/2, 0, +Q/2 \quad (5-18)$$

mit der in Bild 5.15b angegebenen Verteilungsdichtefunktion $p(\Delta_r)$ und der mittleren Leistung

$$\overline{\Delta_r^2} = Q^2/8 \quad . \quad (5-19)$$

Außerdem erzeugt die Rundungsoperation an der Summe einen gleichverteilten Rundungsfehler Δ_R nach Bild 5.15c mit

$$\overline{\Delta_R^2} = Q^2/12 \quad (5-20)$$

Die mittlere Leistung des Gesamtfehlers Δ_{ZR2} bei zufälliger Rundung ZR2 ist dann

$$\overline{\Delta_{ZR2}^2} = \overline{\Delta_r^2} + \overline{\Delta_R^2} = 2,5 Q^2/12 \quad . \quad (5-21)$$

Gegenüber normaler Rundung nimmt damit die Varianz des Quantisierungsfehlers nur noch um den Faktor 2.5 zu (bei ZR1 war es der Faktor 4). Die Verteilungsdichtefunktion des Gesamtfehlers entsteht durch Faltung der Einzelfunktionen und ist in Bild 5.15d wiedergegeben. Es fällt dabei die Absenkung auf $1/(4Q)$ für Fehler mit $|\Delta_{ZR2}| > Q/2$ auf. Der Gesamtfehler entsteht durch Überlagerung von Δ_r und dem vom Signal im Rückführungszweig unabhängigen Fehler Δ_R . Grenzzyklen können wegen des aperiodischen Fehlers nicht existieren.

b) $u(k) = 0$

Ein Block 2. Grades in der 1. kanonischen Form mit ZR2 verhält sich bei verschwindendem Eingangssignal genau wie bei ZR1 unter 5.3.2.1. Grenzzyklen treten nicht auf, das Filter erzeugt nur Restauschen.

Bei Blöcken in der 2. kanonischen Form gilt dies nicht mehr; in diesem Fall werden auch bei $u(k) = 0$ mindestens zwei

doppelt lange Produkte addiert. Ein zufallsgesteuertes Rundungsbit in einem der Summanden reicht nicht aus, um einen zufälligen Quantisierungsfehler nach Addition und Rundung zu garantieren. Dies soll an einem Zahlenbeispiel gezeigt werden:
Der Anfangszustand des Filters in Bild 5.11 sei

$$x_1(k) = x_2(k) = 2Q$$

Mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_0 &= 0,42 \\ c_1 &= -1,21 \end{aligned}$$

wird das rückgekoppelte Signal bei ZR2 in einem Fall (zufälliges bit = Rundungsbit)

$$\left[-c_0 x_1(k) - c_1 x_2(k) \right]_R = \left[1,58 \right]_R \cdot Q = 2Q$$

und im anderen Fall (zufälliges bit $\neq$ Rundungsbit)

$$\left[-c_0 x_1(k) + 0,5Q - c_1 x_2(k) \right]_R = \left[2,08 \right]_R \cdot Q = 2Q.$$

Es bleibt ein Grenzzzyklus mit der Periode 1 und der Amplitude 2Q erhalten.

c) $u(k) = \text{const.}$ oder periodisch

Der in Abschnitt b für die 2. kanonische Form anhand des Zahlenbeispiels beschriebene Effekt kann bei konstantem oder streng periodischen Eingangssignal auch in der 1. kanonischen Form auftreten. Mit der Zufallsrundung ZR2 kann daher das Auftreten von Grenzzyklen nicht zuverlässig verhindert werden.

5.3.2.4 Kombinierte Zufallsrundung ZR3

Das unter 5.3.2.3 diskutierte Verfahren ZR2 ermöglicht für rauschartige Eingangssignale, daß das Quantisierungsrauschen nur geringfügig zunimmt. Es ist aber wegen der zuletzt beschriebenen Eigenschaften bei anderen als stochastischen

Eingangssignalen nicht ausreichend für eine zuverlässige Unterdrückung von Grenzyklen.

Wenn man nun in Kaskadenfiltern mit mehreren Blöcken im ersten Teilfilter 2. Grades das Verfahren ZR1 anwendet, erfüllt das Restrauschen am Ausgang dieses Blocks genau die Bedingung der Aperiodizität für das Eingangssignal bei ZR2. Diese kombinierte Zufallsrundung ZR3, bei der im ersten Block ZR1 und in der nachfolgenden Kaskade ZR2 angewandt wird, verhindert die Entstehung von Grenzyklen bei minimaler Erhöhung des Quantisierungsrauschens.

5.3.3 Experimenteller Vergleich von Zufallsrunden mit anderen Methoden zur Grenzyklusreduktion.

5.3.3.1 Rein rekursiver Block 2. Grades

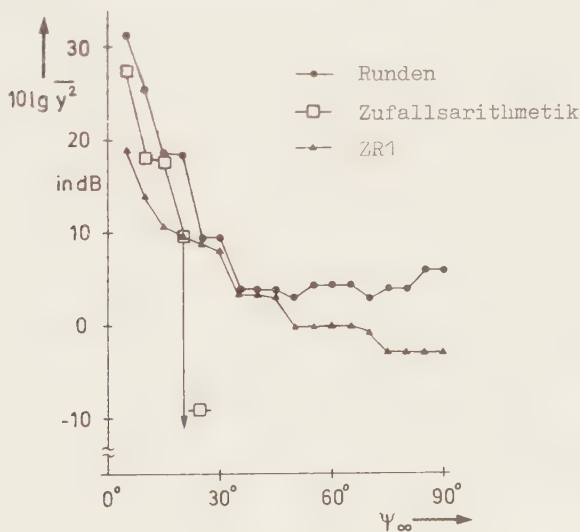


Bild 5.16 : Mittlere Leistung des Restrauschens bzw. der Grenzyklen in einem rein rekursiven Block 2. Grades bei $\varphi_\infty = 0,9$

Zur Untersuchung des Verhaltens eines einzelnen Blocks 8. Grades mit Eingangssignal Null wurde bei einem festen Polradius $\rho_{\infty} = 0,9$ das Ausgangssignal $y(k)$ bei Zufallsrunden (R1 (Restrauschen)), bei Zufallsarithmetik (Grenzyklen mit $1_p = 1$) und bei Runden (Grenzyklen mit $1_p = \frac{1}{2}$) gemessen. Wegen der regellosen Natur des Restrauschens bei R1 ist in Bild 5.16 die mittlere Leistung der verschiedenen Fehlerarten, also auch die Leistung der Grenzyklen bei Runden und Zufallsarithmetik, über dem Polwinkel γ_{∞} aufgetragen. Aus dem Verlauf der Meßkurven ist zu ersehen, daß Zufallsarithmetik hauptsächlich bei Polwinkeln $\gamma_{\infty} \lesssim 10^\circ$ die Entstehung von Grenzyklen verhindert, während die Leistung des Restrauschens bei R1 auch bei kleinen Polwinkeln sehr niedrig ist.

5.3.3.2 Ein Tiefpaß 8. Grades

Für diese Untersuchungen wurde der bereits in 5.1 zitierte Tiefpaß 8. Grades Nr.1 benutzt. Seine Koeffizienten und der Dämpfungsfrequenzgang sind im Anhang A2 zu finden. Außer der 1. und der 2. kanonischen Form werden in diesem Vergleich auch die Vorschläge aus den Literaturstellen [37] und [43] berücksichtigt. Für die Messungen bei der 1. kanonischen Form wurde das aufgebaute digitale Filter [40] benutzt; die anderen Strukturen konnten mit Hilfe eines allgemeinen Programmsystems für die Simulation [44] analysiert werden. In der Tabelle 5.4 beschreiben die ersten beiden Spalten die Filterstrukturen und die Arithmetik. Die nächsten beiden Spalten enthalten die gemessene mittlere Quantisierungsrauschleistung Δ_Q^2 und die erforderliche Erhöhung der inneren Wortlänge

$$\Delta_{wQ} = \left\langle \frac{1}{2} \lg \frac{\overline{\Delta_Q^2} \cdot 12}{Q^2 \cdot (1+R_e)} \right\rangle \quad (5-22)$$

Nabei ist Δ_{wQ} so gewählt [45], daß die Rauschleistung im Innern des Filters nicht größer werden kann, als die unvermeidliche Störungsleistung in den A/D und D/A - Wandlern, die (am Filterausgang) durch

$$(1+R_e)Q^2/12 = (1 + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |H(\Omega)|^2 d\Omega) Q^2/12 \quad (5-23)$$

gegeben ist.

Filterrealisierung		Quantisierungsrauschen		größter Grenzzzyklus oder Restrauschen
Kaskadenstruktur	Arithmetik	$\overline{\Delta_Q^2}$	Δ_{w_Q}	$y_{\text{extr.}}$, $\overline{\Delta_R^2}$ $\Delta_{w_{LC}}$, $\Delta_{w_{ZR}}$
Blöcke 2. Grades nach /43/	Betrags- abschneiden	$2,50 \cdot Q^2$	$\langle 4, 1 \rangle = 1$	$y(k) = 0$ bei $u(k) = 0$
Blöcke 2. Grades nach /37/	Betrags- abschneiden	$3,0 \cdot Q^2$	$\langle 4, 2 \rangle = 1$	$y(k) = 0$ bei $u(k) = 0$
Blöcke 2. Gr. in d. 1. kanon. Form	Runden	$8,5 \cdot Q^2$	$\langle 3, 1 \rangle = 4$	$\pm 29 \cdot Q$ Grenzzzyklus $\langle 4, 3 \rangle = 5$
Blöcke 2. Gr. in d. 2. kanon. Form	Runden	$2,8 \cdot Q^2$	$\langle 2, 3 \rangle = 3$	$\pm 19 \cdot Q$ Grenzzzyklus $\langle 4, 2 \rangle = 5$
Blöcke 2. Gr. in d. 1. kanon. Form	Zufalls- arithmetik	$9,8 \cdot Q^2$	$\langle 3, 2 \rangle = 4$	$y(k) = 0$ bei $u(k) = 0$
Blöcke 2. Gr. in d. 1. kanon. Form	ZR1 ZR3	$15 \cdot Q^2$ $11,4 \cdot Q^2$	$\langle 3, 5 \rangle = 4$ $\langle 3, 5 \rangle = 4$	$16 \cdot Q^2$ $9,8 \cdot Q^2$ Restrauschen $\langle 3, 5 \rangle = 4$ $\langle 3, 2 \rangle = 4$
Blöcke 2. Gr. in d. 2. kanon. Form	ZR1 ZR3	$9,4 \cdot Q^2$ $7,7 \cdot Q^2$	$\langle 3, 2 \rangle = 4$ $\langle 3, 1 \rangle = 4$	$8,6 \cdot Q^2$ $7,3 \cdot Q^2$ Restrauschen $\langle 3, 1 \rangle = 4$ $\langle 3, 0 \rangle = 3$

Tabelle 5.4 : Vergleich verschiedener Methoden zur Grenzzzyklusreduktion

am Beispiel eines Tiefpasses 8. Grades

Ohne Eregung ist das Filterausgangssignal entweder Null, oder die Filter erzeugen Grenzzyklen bzw. Restrauschen. Im Fall von Grenzzyklen enthalten die letzten zwei Spalten von Tabelle 5.4 die Extremwerte $y_{\text{ext.}}(k)$ und die erforderliche Wortlängen-erhöhung

$$\Delta w_{\text{LC}} = \left\langle 1d \mid y_{\text{ext.}} \right\rangle \quad (5-24)$$

Bei Restrauschen dagegen sind die mittlere Rauschleistung Δ_{ZR}^2 und

$$\Delta w_{\text{ZR}} = \left\langle \frac{1}{2} \mid d \mid \frac{\Delta_{\text{ZR}}^2 \cdot 12}{Q^2(1+R_e)} \right\rangle \quad (5-25)$$

eingetragen.

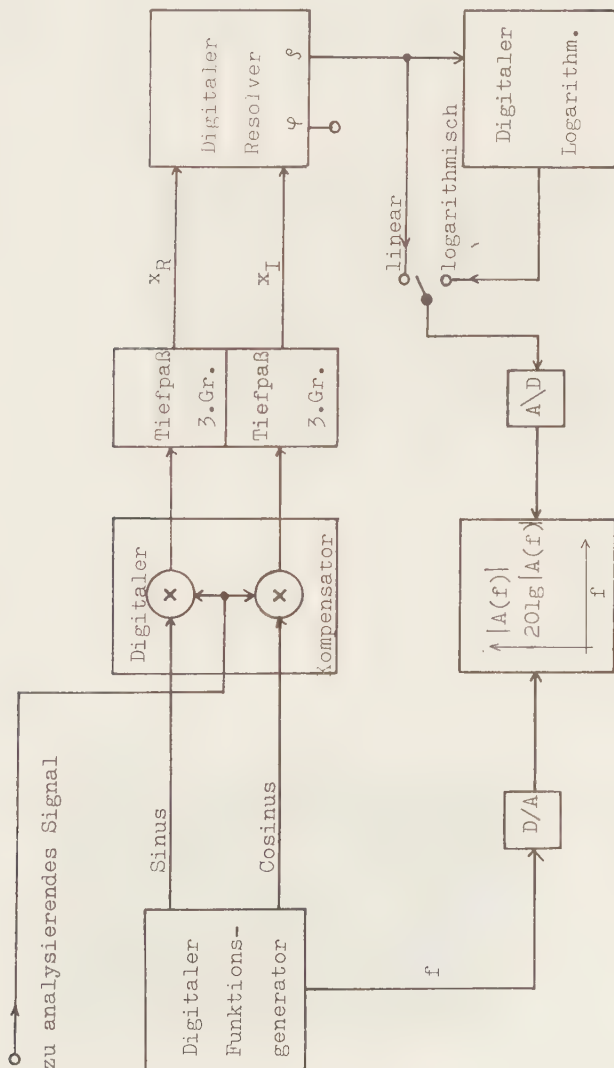
Bei der Wellendigitalfilterstruktur nach /43/ in der ersten Zeile von Tabelle 5.4 treten keine Grenzzyklen auf, aber das Quantisierungsrauschen bei Betragsabschneiden erfordert $\Delta w = 6$ bit . Die folgende 2. kanonische Form nach /37/ mit Addition der doppelt langen Produkte und Betragsabschneiden der Summe benötigt nur $\Delta w = 5$ bit ; ein Grenzzyklus konnte bei dieser Anordnung nicht gefunden werden. Normale Rundung führt in beiden kanonischen Formen (Zeile 3 und 4 in Tab. 5.4) zu großen Grenzzyklen. Eine Erhöhung der inneren Wortlänge um $\Delta w = 5$ bit ist notwendig, obwohl das Quantisierungsrauschen sehr klein bleibt.

Mit Zufallsarithmetik werden in dem hier untersuchten Tiefpaß Grenzzyklen vollständig unterdrückt, da die Polwinkel in allen 4 Blöcken relativ groß sind ($\psi_{\infty} \approx 60^\circ$). Bei der 1. kanonischen Form reicht auf Grund der geringen Rauschleistungszunahme gegenüber Runden $\Delta w = 4$ bit aus. Die Anwendung von Zufallsrundung ZR1 bzw. ZR3 erlaubt in beiden kanonischen Strukturen ebenfalls $\Delta w = 4$ bit. Gegenüber den Vorschlägen nach /43/ bzw. /37/ ergibt sich mit der 2. kanonischen Form bei Anwendung von ZR3 eine theoretische Verbesserung von 2,4 bzw. 1,1 bit. Aus der Tabelle 5.4 und weiteren Beispielen ist weiterhin zu ersehen, daß das Restrauschen höchstens von der gleichen Größenordnung ist, wie das Quantisierungsrauschen bei Betrieb mit Eingangssignal.

6. Anhang

Anhang 1

Meßanordnung für die Spektralanalyse



Anhang 2

Koeffizienten und Frequenzgänge von 5 digitalen Filtern.
Die Koeffizienten sind in oktaler Form mit den Normierungshochzahlen p,s,u wiedergegeben, wie sie zur Eingabe in das rekursive Filter /40/ benötigt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} b_p &= b'_p \cdot 2^p \\ c_s &= c'_s \cdot 2^s \\ c_u &= c'_u \cdot 2^u, \end{aligned}$$

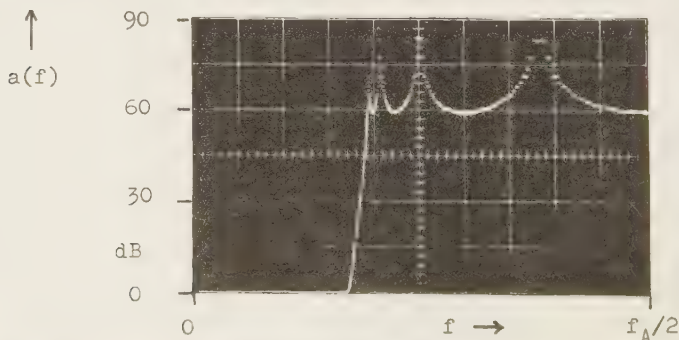
wobei b'_p , c'_s , c'_u die in den Tabellen angegebenen Werte sind.
Als Amplitudencharakteristik wurde jeweils der Dämpfungsfrequenzgang $a(f)$ über der Frequenz f im Bereich $0 \leq f < f_A/2$ aufgetragen.

Filter I , Tiefpaß 8.Grades

P = 1
U = 0
S = 1

BLOCK	B0	B1	B2	C0	C1 >
< 1 >	+11372	-05433	+11372	+50573	-42761
< 2 >	+21502	-15116	+21502	+75146	-36572
< 3 >	+03422	+05136	+03422	+32604	-46601
< 4 >	+15365	-00344	+15365	+65476	-37607

Koeffizienten



Dämpfungsfrequenzgang

Filter II, Tiefpaß 10.Grades

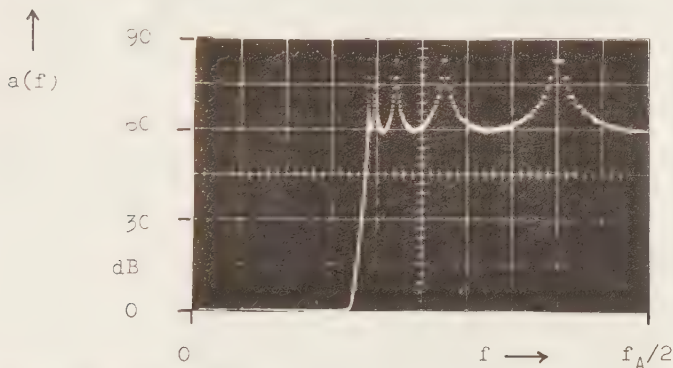
P = 1

U = 0

S = 0

Block	B0	B1	B2	C0	C1 >
< 1>	+13562	-04313	+13562	+52000	-67000
< 2>	+04473	+07400	+04473	+14000	-63000
< 3>	+26161	-20525	+26161	+75000	-72000
< 4>	+11514	+03010	+11514	+32000	-65000
< 5>	+26272	-16532	+26272	+65000	-70000

Koeffizienten



Dämpfungsfrequenzgang

Filter III, Tiefpaß 10.Grades

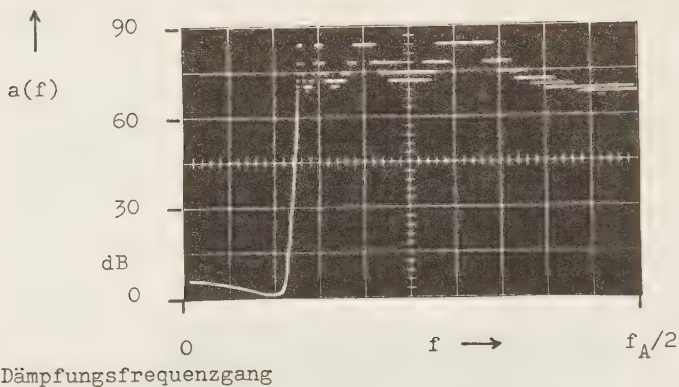
P = 0

U = 0

S = 1

Block	B0	B1	B2	C0	C1
1	+15406	-20155	+15406	+64306	-60000
2	+06765	+05343	+06765	+35341	-51463
3	+46202	-65435	+46202	+75341	-60000
4	+13205	-07243	+13205	+50244	-54632
5	+36704	-53171	+36704	+72703	-60000

Koeffizienten

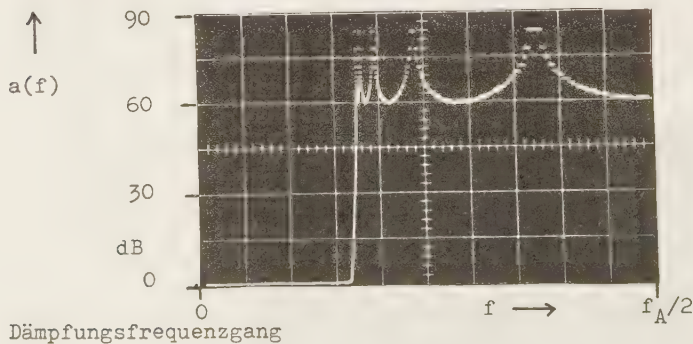


Filter IV , steiler Tiefpaß 10.Grades

```

P = 1
U = 0
S = 1
BLOCK      B0      B1      B2      C0      C1 >
< 1>    +10735   -06044   +10735   +65243   -41272
< 2>    +10441   -01057   +10441   +51043   -44254
< 3>    +26404   -24357   +26404   +76743   -37412
< 4>    +05032   +07140   +05032   +33505   -47504
< 5>    +31755   -26153   +31755   +73662   -37712
    
```

Koeffizienten



Filter V, Bandpaß 16.Grades

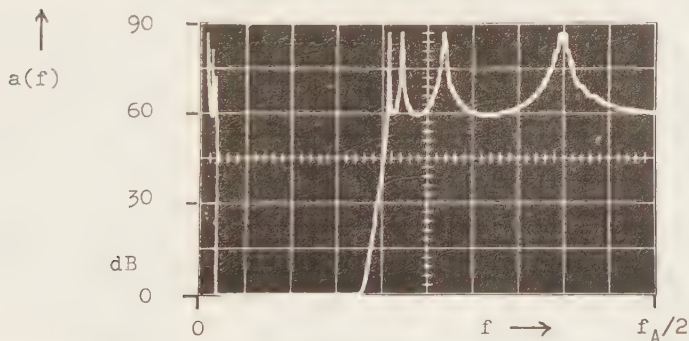
P = 2

U = 0

S = 1

BLOCK	B0	B1	B2	C0	C1 >
< 1>	+04676	-02036	+04676	+62011	-34175
< 2>	+02217	+03425	+02217	+31471	-44076
< 3>	+10342	-20657	+10342	+76225	-76666
< 4>	+33013	-66021	+33013	+62027	-70147
< 5>	+07526	-04506	+07526	+73675	-34042
< 6>	+06113	+00770	+06113	+44335	-36274
< 7>	+13654	-27465	+13654	+77442	-77412
< 8>	+24431	-51026	+24431	+73173	-75167

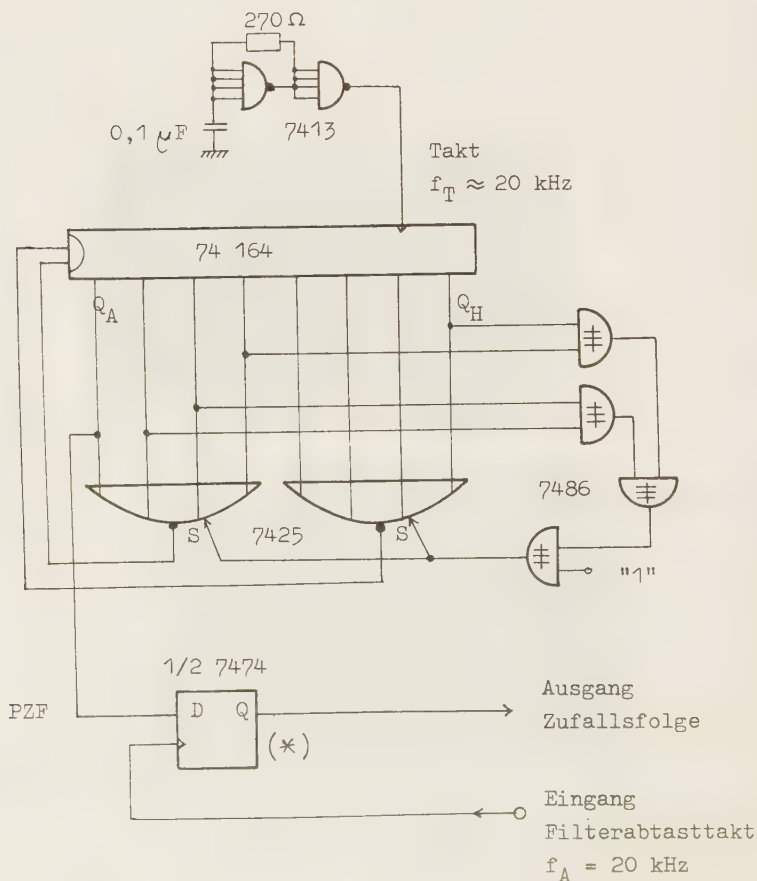
Koeffizienten



Dämpfungsfrequenzgang

Anhang 3

Binärer "Pseudo-Zufalls" Generator mit eigenem Oszillator.
 Die Ausgangsfolge wird im Flipflop (*) vom Filtertakt abgetastet. Mit den "Nor"-Gattern wird der Nullzustand verhindert.
 Die Periode der Pseudozufallsfolge PZF ist 255. Da der eigene Takt nicht mit dem Filtertakt synchronisiert ist, wird die Ausgangsfolge des Flipflops (*) zufällig.



7. Zusammenfassung

Die Untersuchungen in dieser Arbeit befassen sich mit Grenzzyklen in rekursiven digitalen Filtern, die auf Grund der notwendigen nichtlinearen Operationen zur Wortlängenverkürzung bei Festkommaarithmetik entstehen können. Instabilitäten nach Zahlenbereichsüberläufen werden nicht betrachtet. Die Grundstruktur eines höhergradigen digitalen Filters ist als Kaskaden- bzw. Parallelschaltung von Blöcken 2. Grades vor-
ausgesetzt.

Für Blöcke 2. Grades in der 1. und 2. kanonischen Form bei verschwindendem Eingangssignal werden aus der Literatur bekannte Abschätzungsformeln für Amplitude und Periodenlänge von Grenzzyklen verglichen mit experimentell ermittelten Meßwerten. Die auftretenden verschiedenen Arten von Grenzzyklen und ihre Eigenschaften werden theoretisch erklärt mit der Methode der "wirksamen Koeffizienten". Für den praktischen Gebrauch resultieren zwei Verfahren zur schnellen Ermittlung der Grenzzyklusparameter, wenn die Rückführungskoeffizienten bekannt sind.

Die Ausdehnung der experimentellen Untersuchungen auf Filter 2. Grades mit konstantem oder periodischem Eingangssignal liefert im 3. Kapitel die Grundlagen für eine empirische Abschätzung von Grenzzyklen in einer Kaskade von Blöcken 2. Grades. Der Vergleich mit tatsächlich auftretenden Grenzzyklusamplituden erfolgt an mehreren steilflankigen Tiefpässen und an einem Bandpaß.

Die Wirkung von Abschneiden zur Grenzzyklusreduktion ist Gegenstand der Untersuchungen im Kapitel 4. Außer der 1. und 2. kanonischen Form werden eine neue Struktur (ohne Grenzzyklen bei Abschneiden), eine Struktur mit Zusammenfassung der Produkte vor der Quantisierung, sowie Wellendigitalfilterstrukturen mit Abschneiden bzw. kontrollierter Rundung analysiert.

Mit Hilfe eines freilaufenden, d.h. nicht mit dem Filtertakt synchronisierten Zufallsgenerators ist es auf einfache Weise möglich, Grenzzyklen zu reduzieren oder auch vollständig zu unterdrücken. In 5. Kapitel werden die Auswirkungen von additivem Rauschen im Eingangssignal, von zufälliger Umschaltung zwischen Runden und Abschneiden im Rückführungsweig, und von Zufallsrunden untersucht. Beim experimentellen Vergleich stellt sich Zufallsrundung als die günstigste Methode heraus. Mit ihr werden Grenzzyklen bei einer nur sehr geringen Erhöhung des Quantisierungsrauschens sicher unterdrückt.

8. Literaturverzeichnis

- /1/ Schüßler, H.W.: Digitale Systeme zur Signalverarbeitung, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- /2/ Oppenheim, A.V.; Schafer, R.W.: Digital Signal Processing. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- /3/ Rabiner, L.R.; Gold, B.: Theory and Application of Digital Signal Processing. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975 .
- /4/ Kaiser, J.F.: On the Limit Cycle Problem. Proc. of the IEEE Intern. Symp. on Circuits and Systems, München, 1976, S. 642 - 645.
- /5/ Jackson, L.B.: An Analysis of Limit Cycles due to Multiplication Rounding in Recursive Digital (Sub)-Filters. Proc. Seventh Allerton Conf. on Circuit and System Theory, Monticello, Illinois, S. 69 - 78, 1969.
- /6/ Hess, S.F.: A Deterministic Analysis of Limit Cycle Oscillations in Recursive Digital Filters due to Quantization. Ph.D. Dissertation, Naval Postgraduate School, Monterey, California, Dez. 1970.
- /7/ Parker, S.R.; Hess, S.F.: Limit Cycle Oscillations in Digital Filters. IEEE Trans. Circuit Theory, CT-18, Nr.6, S. 687 - 697, Nov. 1971.
- /8/ Claasen, T.A.C.M.; Mecklenbräuker, W.F.G.; Peek, J.B.H.: Some Remarks on the Classification of Limit Cycles in Digital Filters. Philips Research Reports 28, S. 297 - 305, August 1973.

- /9/ Rahman, M.H.; Maria, G.A.; Fahmy, M.M.: Bounds on Zero-Input Limit Cycles in All-Pole Digital Filters. IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal-Processing Vol. ASSP-24, Nr.2, S. 189 - 192, April 1976.
- /10/ Sandberg, I.W.; Kaiser, J.F.: A Bound on Limit Cycles in Fixed-Point Implementations of Digital Filters. IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-20, S. 110 - 112, Juni 1972.
- /11/ Appel, U.: Bounds on Second-Order Digital Filter Limit Cycles. IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-22, Nr.7, S. 630 - 632, Juli 1975.
- /12/ Ünver, Z.; Abdullah, K.: A Tighter Bound on Quantization Errors in Second-Order Digital Filters with Complex Conjugate Poles. IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-22, Nr.7, S. 632 - 633, Juli 1975.
- /13/ Chang, T.L.: A Note on Upper Bounds on Limit Cycles in Digital Filters. IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal-Processing, Vol. ASSP-24, Nr.1, S. 99 - 100, Feb. 1976.
- /14/ Yakowitz, S.; Parker, S.R.: Computation of Bounds for Digital Filter Quantization Errors. IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-20, Nr.4, S. 391 - 396, Juli 1973.
- /15/ Parker, S.R.; Yakowitz, S.: A General Method for Calculating Quantization Error Bounds due to Roundoff in Multivariable Digital Filters. IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-22, Nr.6, S. 570 - 572, Juni 1975.
- /16/ Long, J.L.; Trick, T.N.: An Absolute Bound on Limit Cycles due to Roundoff Errors in Digital Filters. IEEE Trans. Audio and Electroacoust., Vol. AU-21, Nr.1, S. 27 - 30, Februar 1973.

- /17/ Long, J.L.; Trick, T.N.: A Note on Absolute Bounds on Quantization Errors in Fixed-Point Implementations of Digital Filters. IEEE Trans. Circuits and Systems, Juni 1975, Vol. CAS-22, Nr.6, S. 567 - 570.
- /18/ Büttner, M.; Eckhardt, B.; Oetken, G.: Meßtechnik in der seriellen digitalen Signalverarbeitung. Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 22. Herausgegeben von H.W. Schübler, Erlangen, 1976 .
- /19/ Büttner, M.; Eckhardt, B.: Some Digital Measuring Devices for Investigations of Digital Filters and for Digital Signal Processing. Tagungsband der "Journées d'Electronique 1975" in Lausanne, S. 295 - 306 .
- /20/ Schloß, J.: Ein Gerät zur Messung der Periode von Grenzyklen in Blöcken 2. Grades und Meßergebnisse. Persönliche Mitteilung 1975 .
- /21/ Büttner, M.; Schloß, J.: On the Experimental Investigation of Bounds of the Amplitude of Limit Cycles. Proc. of the 1976 European Conference on Circuit Theory and Design, Genua, S. 709 - 716.
- /22/ Kieburztz, R.B.; Lawrence, V.B.; Mina, K.V.: Control of Limit Cycles in Recursive Digital Filters by Randomized Quantization. Proc. of the IEEE International Symposium on Circuits and Systems 1976, S. 624 - 627.
- /23/ Büttner, M.: Meßtechnische Untersuchung von Grenzyklen. Vortrag im DFG-Kolloquium in Erlangen, März 1974.
- /24/ Mina, K.V.; Lawrence, V.B.: Discovery of a New and Interesting Class of Limit Cycles in Recursive Digital Filters. Arden House, Februar 1976.

- /25/ Büttner, M.: Some Experimental Results Concerning Random-like Noise and Limit Cycles in Recursive Digital Filters. NTZ-28, 1975, H. 11, S. 402 - 406.
- /26/ Kiebertz, R.B.: An Experimental Study of Roundoff Effects in a Tenth-Order Recursive Digital Filter. IEEE Trans. COM-21, Juni 1973, S. 757 - 763.
- /27/ Dehner, G.: A Contribution to the Optimization of Roundoff-Noise in Recursive Digital Filters. AEÜ-29, 1975, S. 505 - 510.
- /28/ Brubaker, T.A.; Gowdy, J.N.: Limit Cycles in Digital Filters. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-17, Nr.5, S. 675 - 677, Okt. 1972.
- /29/ Maria, G.A.; Fahmy, M.M.: Limit Cycle Oscillations in a Cascade of First- and Second-Order Digital Sections. IEEE Trans. Circuits and Systems, Vol. CAS-22, Nr.2, S. 131 - 134, Feb. 1975.
- /30/ Schüßler, H.W.: Persönliche Mitteilung, 1975.
- /31/ Dehner, G.: Koeffizientensätze für mehrere digitale Filter. Persönliche Mitteilung, 1975.
- /32/ Kao, C.Y.: An Analysis of Limit Cycles due to Sign-Magnitude Truncation in Multiplication in Recursive Digital Filters. 5 th Asimolar Conf. on Circuits and Systems, Pacific Grove 1971.
- /33/ Eckhardt, B.: Untersuchungen des Multipliziererfehlers in digitalen Filtern. Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr.21. Herausgegeben von H.W. Schüßler, Erlangen 1975.

- /34/ Claasen, T.A.C.M.; Mecklenbräuker, W.F.G.; Peek, J.B.H.:
Quantization Noise Analysis for Fixed-Point Digital
Filters using Magnitude Truncation for Quantization.
IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-22, 1975
S. 887 - 895.
- /35/ Dehner, G.: Ein Beitrag zum rechnergestützten Entwurf
rekursiver digitaler Filter minimalen Aufwandes.
Ausgewählte Arbeiten über Nachrichtensysteme Nr. 23.
Herausgegeben von H.W. Schüßler, Erlangen, 1976.
- /36/ Eckhardt, B.; Schüßler, W.: On the Quantization Error of
a Rounded Sum of Rounded Products. AEU 29, 1975,
S. 308 - 311.
- /37/ Claasen, T.A.C.M.; Mecklenbräuker, W.F.G.; Peek, J.B.H.:
Second-Order Digital Filter with only one Magnitude-Trun-
cation Quantizer and Having Practically no Limit Cycles.
Electronics Letters, Vol. 9, Nr.22, Nov. 1973,
S. 531 - 532.
- /38/ Claasen, T.A.C.M.; Mecklenbräuker, W.F.G.; Peek, J.B.H.:
Remarks on the Zero-Input Behaviour of Second-Order
Digital Filters Designed with one Magnitude-Truncation
Quantizer. IEEE Trans. on Acoust., Speech and
Signal-Processing, Vol. ASSP-23, Nr. 2, April 1975,
S. 240 - 242.
- /39/ Dehner, G.F.: On the Noise Behaviour of a Digital Filter
in Cascade Structure. Proc. of the IEEE International
Symposium on Circuits and Systems, 1976, S. 348 - 351.
- /40/ Eckhardt, B.; Winkelkemper, W.: Ein Beitrag zum
Schaltungsentwurf digitaler Filter für den Tonfrequenz-
bereich. NTZ 1974, S. 2 - 10.

- /41/ Fettweis, A.: Pseudopassivity, Sensitivity and Stability of Wave Digital Filters. IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-19, Nov. 1972, S. 668 - 673.
- /42/ Fettweis, A.; Meerkötter, K.: Suppression of Parasitic Oscillations in Wave Digital Filters. IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-22, Nr. 3, März 1975, S. 239 - 246.
- /43/ Meerkötter, K.; Wegener, W.: New Second Order Digital Filter Without Parasitic Oscillations. AEU 29, Nr. 7/8, 1975, S. 312 - 314.
- /44/ Kuo, B.C.: Discrete-Data Control Systems. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1970.
- /45/ Butterweck, H.J.: Suppression of Parasitic Oscillations in Second- Order Digital Filters by Means of a Controlled-Rounding Arithmetic. A E Ü 29, 1975, S. 371-374 .
- /46/ Verkroost, G.; Butterweck, H.J.: Suppression of Parasitic Oscillations in Wave Digital Filters and Related Structures by Means of Controlled Rounding. A E Ü 30, 1976, S.181-186.
- /47/ Classen, T.A.C.M.: Quantization Noise Analysis of Digital Filters with Controlled Quantization. Electronics Letters, Vol.12., Jan.1976, S. 46-48.
- /48/ Kiebartz , R.B.: Rounding and Truncation Limit Cycles in a Recursive Digital Filter. IEEE. Trans. on Acoustics, Speech a. Signal Processing, ASSP-22, Feb. 1974, S.73 .
- /49/ Schöltzel, P.: Einführung in die Korrelations- Meßtechnik Elektronik 1971, Heft2, S.39-42 und Heft 3, S.93-96 .

- /50/ Kieburztz, R.B.; Mina, K.V.: An Improved Digital Filter-Circuit, U.S. Patent, Nr. 3 906199, Dez. 1974 .
- /51/ Büttner, M.: Ein Verfahren zur Vermeidung von Grenzzyklen in digitalen Filtern bei minimaler Erhöhung des Quantisierungsrauschens. Vortrag im DFG Kolloquium " Digitale Filter" Bochum, Okt. 1975.
- /52/ Büttner, M.: A Novel Approach to Eliminate Limit Cycles in Digital Filters with a Minimum Increase in the Quantization Noise. Proc. IEEE Intern. Symp. on Circuits and Systems 1976, S.291-294.
- /53/ Büttner, M.: Elimination of Limit Cycles in Digital Filters with very Low Increase in the Quantization Noise. IEEE Trans. on Circuits and Systems, Vol. CAS-24 , Nr.6 , Juni 1977 , S.
- /54/ Büttner, M.: Digitale Signalverarbeitungsgeräte (digitale Filter) ohne Grenzzyklen. Patentanmeldung H03H 11-00 P 2537050.7 vom 20.8.1975.
- /55/ Dehner, G.: Ein Programmsystem für die Simulation. Persönliche Mitteilung, 1975.
- /56/ Callahan, A.C.: Random Rounding, some Principles and Applications . Proc. IEEE Int. Symp. on Acoustics, Speech and Signal Processing 1976 , S. 501 - 504 .

Lebenslauf

Manfred Büttner

- 2.12.1944 Geburt in Unterulsenbach, Kreis Fürth
- 1951-1956 Volksschule in Wilhermsdorf
- 1956-1965 Oberrealschule in Fürth
- 1965 Abitur
- 1965-1967 Bundeswehrdienstzeit, Teilpraktikum
- 1967-1972 Studium der Elektrotechnik an der Universität
Erlangen-Nürnberg. Zwischenzeitlich Praktikum bei
Fa. Hühn, Wilhermsdorf
Fa. AEG-Telefunken, Nürnberg
Fa. Grundig, Fürth
- 1972 Abschluß des Studiums mit dem Diplom
- 1973-1975 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Nachrichtentechnik der Universität Erlangen-Nürnberg
- seit 1975 wissenschaftlicher Assistent am gleichen Institut

Manfred Büttner

Copy-Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197